

Treball de Fi de Grau

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials

Diseño, estudio y construcción de un levitador magnético con Arduino

Autor: Joan Pau Borràs Marne

Director: Manel Velasco

Convocatòria: 06/2016



Escola Tècnica Superior
d'Enginyeria Industrial de Barcelona



Resumen

En este trabajo se ha perseguido el objetivo de diseñar y construir un levitador magnético controlado por Arduino, sencillo a la hora de montar y económico. Además, se pretende llevar a cabo todas las fases del proyecto englobándolas dentro de la gran división que supone por un lado el diseño y por otro la ejecución del proyecto.

En la fase de diseño, se ha hallado un modelo que caracteriza el comportamiento del sistema, se han hallado los parámetros característicos de nuestro levitador y se ha simulado su comportamiento con *Simulink*.

En la fase de ejecución se ha construido un levitador magnético estable mediante un controlador PI y usado un sensor de efecto Hall.

Por último, se han evaluado los costes de ejecución de este proyecto y se ha evaluado también el impacto ambiental que puede suponer.

Sumario de capítulos

RESUMEN	1
SUMARIO DE CAPÍTULOS	4
SUMARIO DE FIGURAS	7
GLOSARIO	10
1. PREFACIO	11
1.1. Origen del proyecto y motivación	11
1.2. Requerimientos previos	11
2. INTRODUCCIÓN	13
2.1. Objetivos, alcance y restricciones del proyecto	13
2.2. Levitación magnética. Origen y aplicaciones tecnológicas	16
3. MODELO MATEMÁTICO	17
3.1. Modelo eléctrico	17
3.1.1. Resistencia, R	18
3.1.2. Coeficiente de autoinducción, L	19
3.2. Modelo mecánico	20
3.3. Ecuaciones en el espacio de estados	22
3.4. Obtención de los parámetros característicos de la planta	26
3.5. Cálculo de la función de transferencia	31
4. MODELIZACIÓN CON <i>SIMULINK</i>	33
4.1. Sistema en lazo abierto	33
4.2. Sistema en lazo cerrado	35
5. PARTES DEL SISTEMA	37
5.1. Actuador	37
5.2. Sensor	38
5.3. Arduino	39
5.4. Etapa de potencia (Motor Shield Arduino)	40
5.5. Estructura de soporte	41
6. CONSTRUCCIÓN Y EXPERIMENTACIÓN	42
6.1. Sensor	42
6.2. Controlador	47

6.2.1. Controlador P	48
6.2.2. Controlador PI	57
6.3. Detalles del montaje	61
7. PRESUPUESTO	64
8. ESTUDIO DE IMPACTO AMBIENTAL	65
CONCLUSIONES	66
AGRADECIMIENTOS	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
BIBLIOGRAFÍA	69
Referencias bibliográficas	69
Bibliografía complementaria	71

Sumario de figuras

Fig. 1.	Esquema de un levitador magnético genérico	14
Fig. 2.	Arduino Uno, microcontrolador usado.....	15
Fig. 3.	Motor Shield Arduino, etapa de potencia usada.....	15
Fig. 4.	Sensor infrarrojos	15
Fig. 5.	Dependencia de la sección efectiva de un conductor cilíndrico según la frecuencia 19	
Fig. 6.	Cotas del solenoide.....	20
Fig. 7. y Fig. 8.	Montaje usado para determinar la L	29
Fig. 9. y Fig. 10.	Resultados obtenidos en el osciloscopio.....	29
Fig. 11.	Electroimán conectado al generador de funciones y al osciloscopio	30
Fig. 12.	Diagrama de bloques en lazo cerrado	32
Fig. 13.	Diagrama de bloques en lazo abierto.....	33
Fig. 14.	Respuesta del sistema con la posición inicial por encima del punto de equilibrio	34
Fig. 15.	Respuesta del sistema con la posición inicial por debajo del punto de equilibrio	34
Fig. 16.	Diagrama de bloques en lazo cerrado	35
Fig. 17.	Respuesta del sistema con el controlador PI	36
Fig. 18.	Electroimán usado para hacer el levitador	37
Fig. 19.	Sensor de infrarrojos	38
Fig. 20.	Sensor de efecto Hall	Fig. 21. Esquematzación efecto Hall.....39
Fig. 22.	Etapa de potencia	
Fig. 23.	Pines reservados o con función predefinida de la etapa de potencia	40

Fig. 24.	Estructura de soporte del electroimán.....	41
Fig. 25.	Gráfico Tensión vs Distancia.....	42
Fig. 26.	Comparativo sensor	43
Fig. 27 y Fig. 28.	Proceso de calibración del sensor.....	44
Fig. 29.	Diagrama temporal.....	44
Fig. 30.	Lectura sensor y modelos	45
Fig. 31.	Root Locus per un controlador P	48
Fig. 32.	Ampliación zona indicada Root Locus	48
Fig. 33.	Sistema trabajando a PWM=490Hz.....	52
Fig. 34.	Sistema trabajando a PWM=31,25kHz	52
Fig. 35.	Respuesta del sistema para $k_p = 5$	53
Fig. 36.	Respuesta del sistema para $k_p = 9 - 11$ y offset PID = 0.....	54
Fig. 37.	Respuesta del sistema para $k_p = 9 - 11$ y offset PID = 180.....	54
Fig. 38.	Respuesta del sistema para $k_p = 8,5$	55
Fig. 39.	Respuesta del sistema para $k_p = 11,75$	56
Fig. 40.	Respuesta del sistema para $k_p = 5$ y $k_i = 6$	58
Fig. 41.	Respuesta del sistema para $k_p = 4,5$ y $k_i = 6$	58
Fig. 42.	Respuesta del sistema para $k_p = 6$ y $k_i = 6$	59
Fig. 43.	Respuesta del sistema para $k_p = 5,5$ y $k_i = 6$	59
Fig. 44.	Respuesta del sistema para $k_p = 5$ y $k_i = 6,5$	60
Fig. 45.	Respuesta del sistema para $k_p = 5$ y $k_i = 3,5$	60
Fig. 46.	Respuesta del sistema para $k_p = 5$ y $k_i = 4$	61
Fig. 47.	Conexión del sensor al Arduino	61

Fig. 48.	Conexión del electroimán al Arduino.....	62
Fig. 49.	Levitador funcionando_1 Fig. 50. Levitador funcionando_2.....	62
Fig. 51.	Arduino en funcionamiento	63

Glosario

Capítol opcional. Quan un document conté signes, símbols, abreviatures, acrònims o termes que poden no ser compresos fàcilment i ràpidament pels possibles lectors haurien de definir-se en una o varies llistes. L'existència d'aquestes llistes no justifica l'omissió d'una explicació sobre aquests elements quan apareixen per primera vegada en el text

PWM – Pulse Width Modulation

PID – Proportional, Integral and Derivative

1. Prefacio

1.1. Origen del proyecto y motivación

Este trabajo presenta su origen y su motivación en una optativa previamente cursada durante el grado vinculada a los sistemas de control automático combinado con la levitación magnética. El gran atractivo de este proyecto radica en que a pesar de tratarse de dos disciplinas muy amplias, extensas e incluso de gran complejidad y dificultad en ciertos momentos, a su vez permiten generar aplicaciones de gran utilidad de forma relativamente sencilla, lo que resulta sorprendente y fascinante.

1.2. Requerimientos previos

Este es un proyecto para el cual resultan imprescindibles unos conocimientos mínimos de electromagnetismo y de control automático de sistemas y también es muy recomendable poseer ciertas nociones sobre el lenguaje de programación utilizado en un Arduino. Si bien no es necesario que la base conceptual sea muy extensa ni es imperativo ser un experto en los ámbitos asociados al proyecto, facilitará el seguimiento de éste el conocer las leyes físicas que rigen los fenómenos con los que se va a trabajar, ya que no es objeto de este proyecto la justificación ni el desarrollo exhaustivo de todos los fenómenos en cuestión.

2. Introducció

A continuació se presenten els objectius i el alcance del projecte, así como una breu explicació sobre la idea del projecte.

2.1. Objectivos, alcance y restricciones del proyecto

El objetivo fundamental que persigue este proyecto es el diseño, la construcción y el estudio de un levitador magnético con un Arduino que mediante un lazo de regulación estabilice el objeto levitado en una posición concreta. Por tanto, de este objetivo global se desgranar otros objetivos intermedios y de menor envergadura como son la modelización de la planta con la que se trabaja, la elaboración y diseño del controlador adecuado o la consecución del montaje de todo el sistema y su comportamiento acorde al estudio realizado.

El ámbito del control automático de sistemas es muy extenso y permite una gran cantidad de aplicaciones y proyectos y por eso resulta de vital importancia definir de forma clara el alcance de este proyecto. Para hacerlo de forma estructurada, el alcance queda plasmado en los puntos que aparecen a continuación:

- Hallar los parámetros característicos de la planta de forma satisfactoria y funcional que permita caracterizar el comportamiento de la planta.
- Construcción del levitador y conseguir que haga levitar el objeto deseado.
- Explorar las posibilidades que ofrece un controlador PID y escoger aquella que ofrezca un mejor comportamiento y un mejor resultado.
- Exploración del estado del arte.
- Valoración económica del proyecto.
- Estudio del impacto ambiental del proyecto.

Por último, también es fundamental mencionar las restricciones del proyecto, ya que suponen un gran condicionante tanto en los resultados como en el desarrollo de éste. En primer lugar, existe la restricción de que el proyecto resulte económico para poder exportarlo al ámbito de la docencia. Además, el control debe llevarse a cabo utilizando un Arduino, ya que es un controlador muy versátil y accesible, tanto económica como a nivel de conocimientos necesarios. Por último, debe poder llevarse a cabo y ejecutarse fuera de

un laboratorio, con lo que debe poder alimentarse desde el puerto USB de un ordenador, que es lo necesario para alimentar el Arduino. Todas estas restricciones tendrán un gran impacto en la solución definitiva y el proceso de desarrollo del proyecto, como se irá viendo a lo largo de esta memoria.

Lo que se busca en este proyecto es conseguir la levitación estable de un objeto utilizando las fuerzas electromagnéticas.

Para conseguir la levitación necesitamos compensar la fuerza de la gravedad, el peso, con una fuerza electromagnética que haga que la resultante sea nula. Con tal de generar una fuerza electromagnética necesitamos generar un campo magnético y para generar este campo se empleará un electroimán.

Un electroimán es un dispositivo que está constituido por dos elementos imprescindibles: el solenoide y el núcleo. Un solenoide es una bobina que genera un campo magnético cuando por ella se hace circular una corriente eléctrica. El núcleo facilita e intensifica el establecimiento del campo magnético, ya que al tratarse de un material ferromagnético, los dipolos magnéticos que lo constituyen presentan mayor facilidad de orientación bajo la acción de un campo magnético respecto, por ejemplo, el aire, un material paramagnético [1][2].

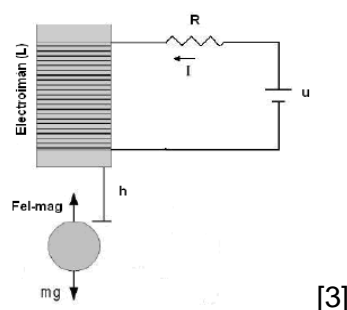


Fig. 1. Esquema de un levitador magnético genérico

Disponemos de un elemento capaz de generar un campo magnético variable según la corriente que le hacemos circular. Por tanto, necesitamos controlar la corriente que suministramos para poder controlar el campo magnético que generamos. En este proyecto el controlador escogido es un Arduino Uno, un controlador digital. El problema que aparece es que el controlador trabaja con corrientes del orden de mA mientras que para alimentar el electroimán se utilizan corrientes del orden de A. Por eso surge la necesidad de introducir al sistema un elemento que relacione las señales de control (originarias del Arduino) y las señales de potencia (originarias de la alimentación a través del cable USB): la etapa de

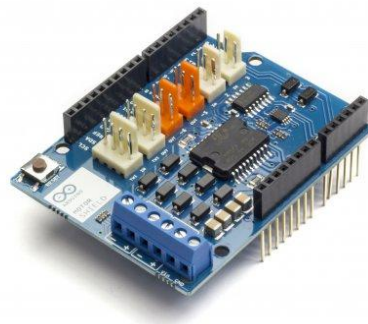
potencia.



[4]

Fig. 2. Arduino Uno, microcontrolador usado

La etapa de potencia es un conjunto de dispositivos electrónicos que nos permiten conectar los elementos de la parte de señal con los elementos de la parte de potencia. A pesar de la compleja configuración que presenta, resulta muy fácil comprender su funcionamiento, ya que lo que nos permite es controlar la corriente eléctrica que circula a través de los terminales que se alimentan del puerto USB del ordenador.



[5]

Fig. 3. Motor Shield Arduino, etapa de potencia usada

Por último, para conocer el estado del sistema necesitamos un sensor, un elemento que nos permita conocer el estado del sistema para poder actuar sobre él de forma adecuada para obtener el comportamiento deseado. La idea inicial es utilizar un sensor de infrarrojos pero según sea el comportamiento y las prestaciones de éste puede buscarse un sensor que se adapte mejor a las necesidades.



[6]

Fig. 4. Sensor infrarrojos

2.2. Levitación magnética. Origen y aplicaciones tecnológicas

Para ponernos en contexto empezaremos haciendo un breve resumen sobre qué es la levitación magnética, sus orígenes y algunas aplicaciones de hoy en día.

La levitación magnética consiste en mantener objetos suspendidos únicamente por el efecto de la fuerza magnética, sin existir contacto físico alguno. Por el teorema de Earnshaw se demuestra que esto no se puede conseguir con imanes permanentes, ya que los puntos de equilibrio alcanzables son inestables al menos en una dirección del espacio [7]. Además el sistema es no lineal, lo que significa una dificultad añadida.

A pesar de las complicaciones que presenta, también ofrece una grandes ventajas que hacen que cada vez se busque implementar estas tecnologías en infinidad de campos de la ingeniería.

Una de las aplicaciones más conocidas y famosas son los trenes que funcionan por levitación magnética. Pero aparte de esta aplicación, que es quizás la vista vistosa, existen otras líneas de acción donde también resulta muy interesante la aplicación de la levitación magnética. Un caso que ilustra esto perfectamente es su aplicación en cojinetes y rodamientos magnéticos, que al no presentar contacto entre las partes se evitan fricciones, desgaste y calentamientos, además de una necesidad de mantenimiento y lubricación mucho inferior frente a los rodamientos más convencionales.

Por supuesto, no hay que descuidar el ámbito de la docencia y lo fundamental que resulta tener experimentos y aplicaciones que demuestren, ilustren y respalden todos los principios teóricos que se estudian, con el objetivo de una mejor comprensión y asimilación de conceptos.

3. Modelo matemático

Antes de entrar al análisis de la planta con la que se trabajará y al estudio detallado de cada uno de los elementos que la componen es necesario conocer los fenómenos físicos y los modelos matemáticos que rigen el sistema. Empezaremos con un breve razonamiento deductivo que después quedará respaldado por la demostración matemática.

Nuestra intención es generar sobre el objeto levitado una fuerza de la misma dirección y módulo que la que ejerce la gravedad pero de sentido contrario para así obtener una resultante nula y que el objeto quede suspendido en el aire. Esta fuerza dependerá de la intensidad del campo magnético generado y de la distancia del objeto al electroimán, ya que el campo magnético es una magnitud vectorial que presenta un valor en cada punto y va disminuyendo conforme nos alejamos del origen del campo. A su vez, el campo magnético generado está relacionado con la corriente eléctrica que hacemos circular por el solenoide. Por tanto, la fuerza electromagnética es función de dos variables: la intensidad a través del solenoide y la distancia del elemento levitado al electroimán.

Ahora procederemos al desarrollo matemático para verificar si nuestra deducción previa estaba bien enfocada o si estábamos completamente equivocados y empezaremos por buscar las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema. Durante el desarrollo matemático se irán presentando las distintas premisas de trabajo que se van a utilizar.

3.1. Modelo eléctrico

En primer lugar vamos a considerar la ecuación eléctrica que rige el comportamiento del electroimán y que es la ilustrada en la ecuación 4.1 según [8] y [9]:

$$u = R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + k_v \frac{x \cdot v}{(b^2 + x^2)^{5/2}} \quad (\text{Ec. 3.1})$$

donde **R** es la resistencia de la bobina, **L** el coeficiente de autoinducción de la bobina y **b** el radio de la bobina.

Si analizamos esta ecuación podemos observar que existen 3 fenómenos que condicionan la tensión que tenemos en la bobina:

- En primer lugar, tenemos que al tratarse de una bobina real, ésta presenta una resistencia, **R**, que nos genera una caída de tensión.
- En segundo lugar, tenemos que al tratarse de una bobina, nos aparece una diferencia de tensión cuando la derivada temporal de la corriente que circula no es nula, multiplicada por **L**.
- Por último, por la ley de Faraday sabemos que las variaciones de flujo magnético genera una tensión inducida en una espira, y en su defecto en una bobina, que no es más que una agrupación de espiras.

Como se puede observar, el comportamiento eléctrico del sistema depende de los parámetros característicos del solenoide (la **R**, la **L** y la **b**) y **k_v**.

3.1.1. Resistencia, **R**

La resistencia, **R**, del electroimán es un parámetro característico que depende de la temperatura y de la frecuencia de la corriente que se hace circular, conocido como efecto pelicular o efecto Skin.

La expresión que define la dependencia de la resistencia con la temperatura aparece en la ecuación 4.2 según [10]:

$$R_T = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (T - T_0)) \quad (\text{Ec. 3.2})$$

donde **R₀** es la resistencia conocida a la temperatura **T₀** y **α** es el coeficiente de temperatura y para el cobre tiene un valor de 0,00393.

En nuestro caso se ha comprobado empíricamente que el efecto de la temperatura sobre la resistencia no resulta significativo ya que el punto de trabajo se encuentra muy por debajo de los valores nominales, con lo que se ha considerado que la resistencia se comporta como una constante frente a la temperatura.

Por otro lado, es conocida también la dependencia de la resistencia de un conductor frente a la frecuencia de la corriente que se hace circular por él y que queda ilustrado en la Figura 5 [11]:



Fig. 5. Dependencia de la sección efectiva de un conductor cilíndrico según la frecuencia

De igual modo que con la dependencia de la resistencia respecto la temperatura, se ha comprobado empíricamente si el efecto pelicular resultaba significativo en el régimen de trabajo del electroimán y se ha visto que sí, por lo que no se ha podido considerar que la resistencia se comporta como una constante frente a la frecuencia y ha habido que hallar la resistencia real a la frecuencia de trabajo, como se detalla en el apartado 5 de esta memoria.

3.1.2. Coeficiente de autoinducción, L

En cuanto al coeficiente de autoinducción del electroimán, L , puede hallarse su expresión analítica del siguiente modo:

En primer lugar conocemos que las ecuaciones 4.3 y 4.4 [12] muestran la expresión analítica del flujo (en su definición más general) y de la inducción magnética en el interior de un solenoide en la dirección axial (despreciando los efectos de bordes) respectivamente:

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (\text{Ec. 3.3})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{I} \cdot \frac{N}{l} \quad (\text{Ec. 3.4})$$

donde Φ es el flujo magnético, \mathbf{B} es la inducción magnética, μ_0 la permeabilidad del vacío, N el número de vueltas del solenoide, I la corriente que circula por el solenoide y l la longitud del solenoide.

Por tanto, si sustituimos en la ecuación 4.3, ésta queda de la siguiente forma:

$$\phi = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l} \cdot (\pi R^2) \quad (\text{Ec. 3.5})$$

Sabiendo también que el flujo en un solenoide también puede expresarse según la ecuación 4.6 [12], si aislamos L de la ecuación 4.6 y sustituimos en ella la ecuación 4.5 obtenemos finalmente la ecuación 4.7:

$$\phi = \frac{L \cdot I}{N} \quad (\text{Ec. 3.6})$$

$$L = \frac{\mu_0 \cdot N^2}{l} \cdot (\pi R^2) \quad (\text{Ec. 3.7})$$

En nuestro caso, al tratarse de un solenoide relativamente corto, los efectos de bordes no resultan despreciables, con lo cual es necesario aplicar un factor de corrección, k , según la relación R/l según [12]. En nuestro caso, las medidas son las que aparecen en la Figura 4.6 [13] y, por tanto, la relación $R/l = 0,6$ y el factor de corrección a aplicar sería $k = 0,65$.

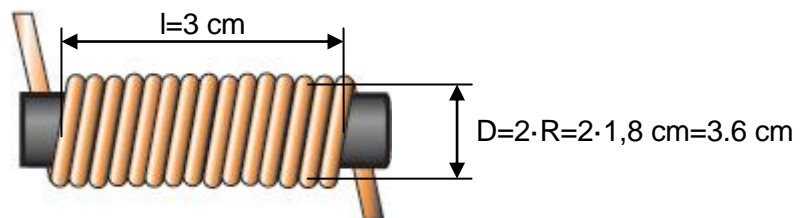


Fig. 6. Cotas del solenoide

Se observa, pues, que el coeficiente de autoinducción del solenoide únicamente depende de parámetros geométricos. En nuestro caso el problema consiste en que el fabricante no facilita todos los parámetros necesarios para llevar a cabo el cálculo, concretamente no sabemos el número de vueltas del solenoide, N , con lo que se deberá hallar la L de forma experimental.

3.2. Modelo mecánico

En primer lugar partimos de la segunda ley de Newton:

$$F = m \cdot a \quad (\text{Ec. 3.8})$$

Y sustituyendo obtenemos:

$$g \cdot m - F_{el_mag} = m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (\text{Ec. 3.9})$$

De esta ecuación necesitamos conocer la expresión analítica de la F_{el_mag} . Llegados a este punto hay que decidir qué objeto queremos que levite: si escogiéramos una pequeña esfera metálica tendríamos que la expresión que nos describe la fuerza sería la ecuación 4.10 [14] mientras que si decidimos hacer levitar un pequeño imán la expresión que caracteriza la fuerza es la ecuación 4.11 [15]. En este proyecto se va a trabajar con un imán, por tanto, a partir de ahora la expresión de referencia de la fuerza electromagnética generada por el electroimán es la que aparece en la ecuación 4.11.

La justificación de esta decisión se basa fundamentalmente en el siguiente punto: para llevar a cabo este proyecto se dispone de un electroimán de 8 W de potencia nominal (12V / 0,67A), lo que significa que no es un electroimán demasiado potente. Además, la alimentación del solenoide es a través del puerto USB de un ordenador, cuya corriente máxima es 0,5A. Por este motivo, si trabajáramos con una pequeña esfera metálica el punto de equilibrio se situaría excesivamente cercano al núcleo del electroimán, lo que no nos interesa ya que deseamos evitar al máximo las interacciones entre estos elementos. Para solucionar este problema se ha decidido trabajar con un imán, lo que permite alejar el punto de equilibrio del electroimán. Esta solución tiene un precio y es que si la distancia entre el núcleo del electroimán y el imán que levita es inferior a cierto valor límite, entonces el imán se adhiere al núcleo sea cual sea el valor del campo generado por el electroimán, lo que nos obliga a situar el punto de equilibrio por debajo de ese valor límite. Además también hace que el modelo del sistema se complique al deber tener en cuentas más fenómenos no despreciables, aunque como se verá más adelante, esto también ha comportado algunas ventajas.

$$F_{el_mag} = k_F \cdot \frac{i^2}{d^2} \quad (\text{Ec. 3.10})$$

$$F_{el_mag} = k_F \cdot \frac{i}{d^4} + k'_F \cdot \frac{1}{d^2} \quad (\text{Ec. 3.11})$$

Como observamos en la ecuación 4.11, se hallan presentes 2 términos que hacen su aportación a la fuerza electromagnética resultante. El primero de ellos es el que representa la interacción entre solenoide e imán, el segundo término es la interacción entre el imán que levita y el núcleo de hierro del solenoide, a partir de ahora componentes 1 y 2 de la fuerza electromagnética resultante respectivamente.

También se aprecia que en la ecuación 4.10 solo aparece un término, el correspondiente a la interacción entre el electroimán y una esfera magnética, ya que el fenómeno descrito en

la ecuación 4.11 no resulta significativo en caso de hacer levitar una esfera magnética.

Por tanto, si sustituimos la ecuación 4.11 en la ecuación 4.9 obtenemos:

$$g \cdot m - (k_F \cdot \frac{i}{d^4} + k'_F \cdot \frac{1}{d^2}) = m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (\text{Ec. 3.12})$$

Como podemos observar la ecuación depende de algunos parámetros constantes como son la **g**, la **m**, la **k_F** y la **k'_F**, cuyos valores se determinarán más adelante. Destacar por último que el criterio de signos adoptado es positivo hacia abajo y negativo hacia abajo.

3.3. Ecuaciones en el espacio de estados

Ahora ya disponemos de las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del sistema, ecuaciones 4.1 y 4.12, y observamos que forman un sistema de ecuaciones no lineal. Llegados a este punto el siguiente paso a dar es el paso a las ecuaciones en el espacio de estados para posteriormente poder linealizar el sistema.

Ante un sistema real complejo en que las variables se relacionan de forma complicada resulta muy útil el paso a ecuaciones en el espacio de estados. El estado de un sistema dinámico es el conjunto mínimo de variables que, conocidas estas variables en un instante de tiempo dado y conociendo la entrada, nos permite conocer el estado del sistema.

Las ecuaciones de estado son el conjunto de todas las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del sistema relacionando las variables de entrada, las de estado y las de salida y su descripción más genérica es la que aparece en las ecuaciones 4.13 [3]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_n; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_n; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_m(t) &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_n; t) \\ y_1(t) &= h_1(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_n; t) \\ y_2(t) &= h_2(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_n; t) \\ &\vdots \\ y_r(t) &= h_r(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_n; t) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 3.13})$$

que puede escribirse de forma matricial:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= F(x, u, t) \\
 y(t) &= H(x, u, t)
 \end{aligned}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}; y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{pmatrix}; u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

$$f(x, u, t) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_n; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_n; t) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_n; t) \end{pmatrix}$$

$$h(x, u, t) = \begin{pmatrix} h_1(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_n; t) \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_n; t) \\ \vdots \\ h_r(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_n; t) \end{pmatrix} \quad (\text{Ec. 3.14})$$

Llegados a este punto podemos definir nuestras variables de estado de acuerdo a las ecuaciones 4.1 y 4.12:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x}_1 = v \\ x_3 = i \end{array} \right\} = X; \quad y = x_1 \quad (\text{Ec. 3.15})$$

con lo que nos quedaría un sistema de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{array} \right\} = F(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \frac{k_F}{m} \cdot \frac{x_3}{x_1^4} - \frac{k_F'}{m} \cdot \frac{1}{x_1^2} \\ \frac{u - R \cdot x_3 - k_v \cdot \frac{x_1 \cdot x_2}{(b^2 + x_1^2)^{5/2}}}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 3.16})$$

donde \mathbf{x} son las variables de estado y \mathbf{u} es la variable de control, en nuestro caso la tensión, también designada \mathbf{u} .

Una vez tenemos escritas las ecuaciones de este modo podemos linealizar el sistema alrededor de un punto de equilibrio. Sabemos que si aplicamos el desarrollo de Taylor a la ecuación 4.16 obtenemos lo siguiente [16]:

$$\dot{X} = F(x, u)_{x^*, u^*} + \frac{\partial F(x, u)}{\partial x}_{x^*, u^*} \cdot (x - x^*) + \frac{\partial F(x, u)}{\partial u}_{x^*, u^*} \cdot (u - u^*) + h.o.t. \quad (\text{Ec. 3.17})$$

donde (x^*, u^*) representa el punto de equilibrio alrededor del cual queremos realizar la linealización.

De la ecuación 4.17 sabemos que el primer término es nulo, ya que para hallar el punto de equilibrio imponemos que $\dot{X} = 0$. Además, se considera que los términos de orden superior son despreciables y, por tanto, nos queda la ecuación 4.18:

$$X \cong \frac{\partial F(x, u)}{\partial x}_{x^*, u^*} \cdot (x - x^*) + \frac{\partial F(x, u)}{\partial u}_{x^*, u^*} \cdot (u - u^*) \quad (\text{Ec. 3.18})$$

En primer lugar debemos buscar los puntos de equilibrio para decidir alrededor de cual vamos a linealizar el sistema. Para ello imponemos $\dot{X} = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{X} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \frac{k_F}{m} \cdot \frac{x_3}{x_1^4} - \frac{k'_F}{m} \cdot \frac{1}{x_1^2} \\ \frac{u - R \cdot x_3 - k_v \cdot \frac{x_1 \cdot x_2}{(b^2 + x_1^2)^{5/2}}}{L} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \pm \sqrt{\frac{k'_F \pm \sqrt{(k'_F)^2 + 4mgk_F} \frac{u}{R}}{2mg}} \\ 0 \\ u / R \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 3.19})$$

Se puede ver que matemáticamente existen infinitos puntos de equilibrio ya que las expresiones halladas dependen de la tensión de entrada del solenoide, con lo que podemos linealizar alrededor del punto de equilibrio que se desee. En la realidad sabemos que de lo que disponemos es de un rango dentro del cual podemos escoger el punto de equilibrio que más nos convenga.

Nótese que el sistema presenta de forma natural un punto de equilibrio inestable, en el que la componente 1 de la fuerza electromagnética es nula y los valores de la componente 2 y

el peso son de igual módulo y signo contrario.

También vale la pena notar que de los 2 términos que componen la fuerza magnética resultante, la componente 1 puede anularse e incluso invertir su signo pero la componente 2 no. En nuestro caso, con tal de simplificar posteriormente el algoritmo de control, se ha decidido que la componente 1 (controlada a través de la tensión) no pueda invertir su signo, sino que únicamente pueda tomar valores en un único sentido. Esto implica que en caso de encontrarnos por encima del punto de equilibrio del imán, la componente 2 es negativa, el peso es positivo. En resumen, en caso de que la componente 2 supere en módulo al peso, se habrá cruzado un punto de no retorno y el imán quedará adherido al núcleo magnético del solenoide. Por este motivo resultará crucial escoger adecuadamente el punto de equilibrio del imán de forma que se encuentre suficientemente alejado del punto de equilibrio natural, para evitar que cualquier pequeña perturbación inestabilice el sistema.

Teniendo todo esto presente acerca de los requisitos que debe cumplir el punto de equilibrio seleccionado para que sea viable podemos continuar calculando las matrices pertinentes para poder llevar a cabo la linealización.

Las ecuaciones que manejamos ahora son:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} & \tilde{x} &= x - x^* \\ y &= C\tilde{x} + D\tilde{u} & \tilde{u} &= u - u^* \end{aligned} \quad (\text{Ec. 3.20})$$

Si calculamos ahora las derivadas parciales de F respecto \mathbf{x} y \mathbf{u} obtenemos las ecuaciones 4.21 y 4.22:

$$\frac{\partial F(x,u)}{\partial x} = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{4k_F}{m} \cdot \frac{x_3}{x_1^5} + \frac{2k_F'}{m} \cdot \frac{1}{x_1^3} & 0 & -\frac{k_F}{m} \cdot \frac{1}{x_1^4} \\ -\frac{k_v}{L} x_2 \cdot f_a(x_1) & -\frac{k_v}{L} \cdot \frac{x_1}{(b^2 + x_1^2)^{5/2}} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 3.21})$$

$$\frac{\partial F(x,u)}{\partial u} = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 3.22})$$

Se puede observar que en la posición A_{31} de la matriz A aparecen f_a . Se han dejado así ya que al tener que evaluar las matrices A y B en el punto de equilibrio y estar la expresión multiplicada por x_2 (en el punto de equilibrio $x_2 = 0$) no aparecerá.

Si observamos la ecuación 4.15 apreciamos claramente que los coeficientes de las matrices C y D son directos, ya que la salida es la posición y no depende ni de la velocidad ni de la aceleración ni de la tensión en bornes del solenoide, siendo los valores los que aparecen en la ecuación 4.23:

$$C = [1 \ 0 \ 0]; \quad D = [0] \quad (\text{Ec. 3.23})$$

Llegados a este punto necesitamos conocer todas las constantes que intervienen en las matrices A, B, C y D y también el valor de las variables de estado en el punto de equilibrio.

Dado que ha resultado necesario determinar varias constantes de forma empírica y esto está detallado en el siguiente punto de esta memoria, ahora se procede al desarrollo de la determinación de las constantes y a continuación se proseguirá con las matrices A, B, C y D para hallar el valor numérico de las matrices y poder posteriormente hallar la función de transferencia de la planta.

3.4. Obtención de los parámetros característicos de la planta

Observando el modelo matemático obtenido en el apartado anterior se aprecia la presencia de varias constantes que son características de cada sistema y que condicionan su comportamiento de forma muy significativa. En esta sección de la memoria vamos a determinar el valor numérico de todas ellas para poder proseguir con el desarrollo matemático y hallar la función de transferencia:

- En primer lugar tenemos la gravedad, **g**, que es conocida y tiene un valor de $9,81 \text{ m/s}^2$.
- A continuación encontramos la masa del objeto que queremos hacer levitar, **m**, que en nuestro caso son $0,01 \text{ kg}$.
- También encontramos que es necesario conocer el valor de **b** (radio del solenoide), siendo el valor el que figura en la ecuación 4.24:

$$b = 0,018 \text{ m} \quad (\text{Ec. 3.24})$$

- En cuanto al punto de equilibrio escogido, se ha escogido que esté situado 1 cm por debajo del punto más bajo del núcleo del solenoide con lo que ha quedado lo siguiente:

$$\begin{Bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ u^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,01 \\ 0 \\ 0,0332 \\ 3,53 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} m \\ m/s \\ A \\ V \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 3.25})$$

Este punto de equilibrio cumple con los requisitos mencionados en el apartado del modelo matemático, ya que el punto de equilibrio natural del imán se ha hallado experimentalmente que se halla a 0,007 m por debajo del punto más bajo del núcleo del electroimán (punto en que la atracción imán-núcleo y el peso se compensan), se ha verificado que está suficientemente por debajo y a su vez nos requiere una acción media para estabilizarlo, ni muy grande ni muy pequeña, lo que nos da margen de acción en cuanto a la tensión aplicada desde el mínimo (0V) hasta el máximo (5V) y desde 0mA hasta 500mA como máximo.

- Además, se ha utilizado este punto de equilibrio para determinar las distintas constantes de las fuerzas magnéticas obteniendo los valores que aparecen a continuación:

$$\begin{aligned} k_F &= 2,8727 \cdot 10^{-8} \frac{N \cdot m^4}{A} \\ k_F' &= 4,8069 \cdot 10^{-6} N \cdot m^2 \\ k_v &= -1,2216 \cdot 10^{-4} V \cdot m^3 \cdot s \end{aligned} \quad (\text{Ec. 3.26})$$

- La resistencia de la bobina, **R**, también es una constante que necesitamos conocer y que vale 18Ω según la ecuación 4.27. Este valor se ha hallado a través de las características nominales del electroimán pero se ha comprobado que según el valor de la frecuencia de la corriente que circula su valor real cambia. Pese a que inicialmente se determinó el valor a 490Hz (frecuencia por defecto del PWM del Arduino), posteriormente hubo que aumentar la frecuencia de trabajo del PWM, con lo que hubo que determinar de nuevo el valor, siendo en el régimen de trabajo real del electroimán (31,25kHz) la resistencia real de 106Ω según la ecuación 4.28:

$$R_N = \frac{U_N}{I_N} = \frac{12}{0,67} \approx 18\Omega \quad (\text{Ec. 3.27})$$

$$R^* = \frac{U^*}{I^*} = \frac{3,53}{0,0332} \approx 106\Omega \quad (\text{Ec. 3.28})$$

- La siguiente constante con la que nos encontramos es el coeficiente de autoinducción, **L**, de la bobina. Como ya se ha visto en la ecuación 4.7, éste podría determinarse de forma

analítica si se conocieran todos los parámetros necesarios pero al no disponer de ellos ha resultado imprescindible determinarlo de forma empírica.

Este ha sido el parámetro que más trabajo ha llevado determinar y a continuación se ilustra el proceso llevado a cabo:

- En primer lugar conocemos que la ecuación diferencial de la bobina es la ecuación 4.29:

$$u = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (\text{Ec. 3.29})$$

- Si ahora aplicamos la transformada de Laplace y aislamos I/U obtenemos:

$$U = RI + sLI \rightarrow \frac{I}{U} = \frac{1}{Ls + R} \quad (\text{Ec. 3.30})$$

- Por último, hacemos el cambio $s=j\omega$ y calculamos el desfase entre tensión y corriente pudiendo aislar posteriormente **L**:

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{Lj\omega + R} \rightarrow \phi = 0 - \arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right) \rightarrow L = \frac{\text{tg}(-\phi) \cdot R}{2\pi \cdot f} \quad (\text{Ec. 3.31})$$

$$\phi = 2\pi f \cdot \Delta t$$

siendo Δt el desfase en segundos entre la corriente y la tensión en la bobina.

Por tanto, si conocemos el desfase ya podremos determinar el valor del coeficiente de autoinducción, **L**, de la bobina. Para ello se conectó la bobina con una resistencia en serie de 230Ω y todo ello a un generador de señales que se configuró para generar una entrada senoidal. La frecuencia debía ser parecida a la frecuencia de trabajo del Arduino, concretamente alrededor de los 31,25kHz, con lo que la señal senoidal de entrada se configuró con esa frecuencia y se halló un $\Delta t = 0,5\mu s$ con lo que calculando el desfase en radianes y posteriormente la **L** obtenemos:

$$\phi = 2\pi f \cdot \Delta t = 2\pi \cdot 33 \cdot 10^3 \cdot (-0,0005 \cdot 10^{-3}) = -0,103 \quad (\text{Ec. 3.32})$$

$$L = \frac{\text{tg}(0,103) \cdot (230 + 106)}{2\pi \cdot 33 \cdot 10^3} = 0,000165 \text{ H} = 0,165 \text{ mH}$$

En las figuras que siguen puede observarse tanto el montaje que se llevó a cabo como los resultados que se obtuvieron en el osciloscopio y que se utilizaron para determinar el valor del coeficiente de autoinducción del solenoide.

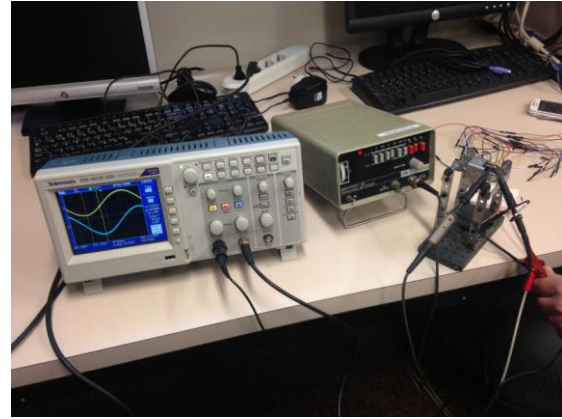
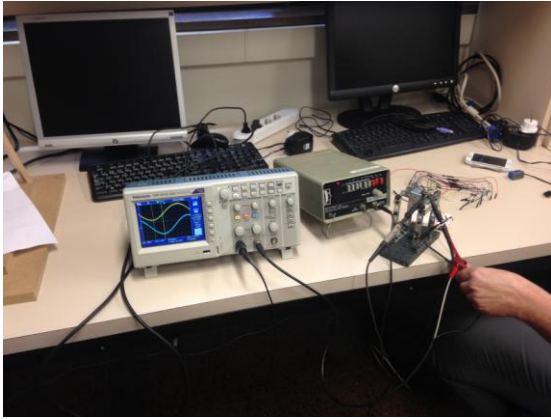


Fig. 7. y Fig. 8. Montaje usado para determinar la L

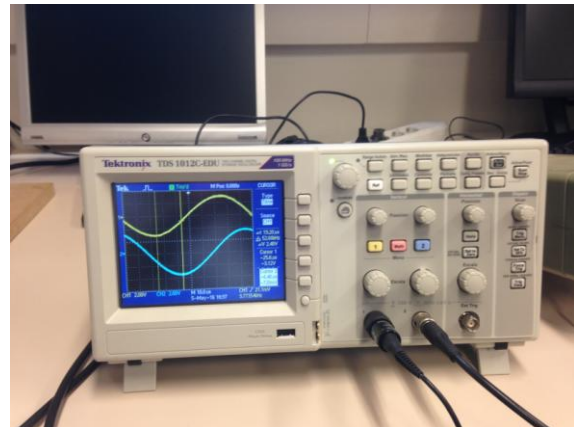
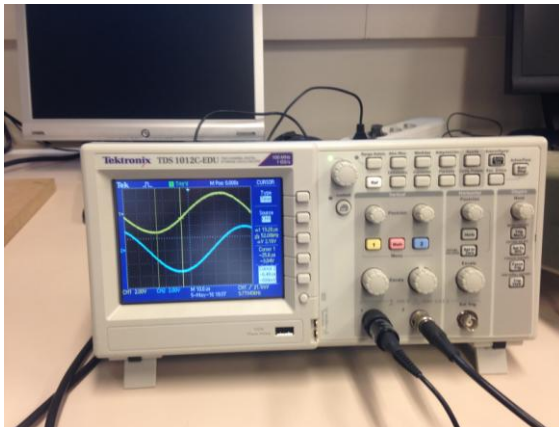


Fig. 9. y Fig. 10. Resultados obtenidos en el osciloscopio

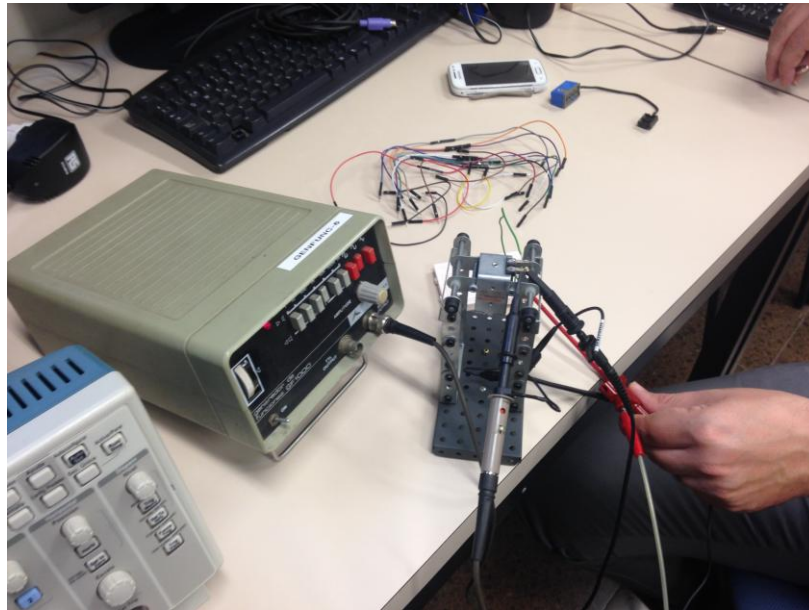


Fig. 11. Electroimán conectado al generador de funciones y al osciloscopio

Por último, también hay que mencionar que en realidad la expresión del coeficiente de autoinducción de una bobina en un levitador magnético puede expresarse con la ecuación 4.33 [8]:

$$L(x) = L_1 + \frac{L_0 \cdot x_0}{x} \quad (\text{Ec. 3.33})$$

Esto es debido a que al introducir un imán en la zona de acción de la bobina, éste altera las propiedades del solenoide de forma inversamente proporcional a la distancia entre solenoide e imán. Por tanto, en realidad el valor que se ha hallado es el que se correspondería con L_1 de la ecuación 4.33 y quedado aún pendiente de determinación el valor de L_0 .

En primer lugar se procedió a la comprobación y se constató que a la distancia a la que está situado el punto de equilibrio el coeficiente de autoinducción de la bobina no sufre perturbación alguna por la presencia del imán levitando en la posición de equilibrio.

En conclusión, se puede considerar que la L de la bobina es constante para una frecuencia de 31,25kHz con el valor que aparece en la ecuación 4.32.

3.5. Cálculo de la función de transferencia

Con los parámetros del sistema ya determinados se pudo recuperar las expresiones algebraicas de apartado del modelo matemático con el objetivo de hallar la función de transferencia de la planta. Para el cálculo de todas ecuaciones que van a aparecer a continuación se utilizó un pequeño script de *Matlab* con tal de agilizarlo y evitar errores de cálculo. Al final, en el Listado 4.1 se adjunta al código para que se pueda verificar cómo se ha hecho:

Partiendo de las ecuaciones 4.20, si aplicamos la transformada de Laplace a ambas ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} & \rightarrow & s \cdot X(s) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \\ y &= C\tilde{x} + D\tilde{u} & \rightarrow & Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 3.34})$$

Si ahora cogemos la primera de las ecuaciones 4.34, aislamos $X(s)$ y la sustituimos en la segunda ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s); & D &= [0] \\ Y(s) &= C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) & \rightarrow & \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B \end{aligned} \quad (\text{Ec. 3.35})$$

con lo que ya tenemos la expresión para calcular la función de transferencia de nuestra planta y que numéricamente es la que se muestra en la ecuación 4.36:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-1.741 \cdot 0.030}{s^3 + 642.424 s^2 + 574.535.798 s - 3.075.948.606} \quad (\text{Ec. 3.36})$$

Una vez se tenía la función de transferencia hubo que discretizarla, ya que Arduino es un controlador digital. El problema es que para discretizar es necesario conocer el período de muestreo, que vale $T = 0,0025s = 2,5ms$, obteniendo la ecuación 4.37:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(-45.580.083 z^2 - 22.260.466 z - 7,04) \cdot 10^{-13}}{z^3 - 1,119 z^2 + 0,1066 z} \quad (\text{Ec. 3.37})$$

Se ha cogido este valor de tiempo de muestreo porque una vez se tuvo todo el código que Arduino debía ejecutar, se miró cuanto tiempo le llevaba hacer una iteración y se obtuvo un valor de aproximadamente 2,5ms pero en cualquier caso esto está explicado más adelante.

A continuación se muestra el código mencionado anteriormente para calcular la función de transferencia de la planta, comentado para un mayor entendimiento:

```
function modelo(a) %Creamos la función modelo, a la que le pasamos como
                  %parámetros de entrada todas las constantes del sistema.

    global Ys
    global Yz
    %Asignamos los parámetros de entrada a la variable correspondiente.
    x1=a(1);
    m=a(2);
    kf=a(3);
    kf_prima=a(4);
    u=a(5);
    R=a(6);
    L=a(7);
    b=a(8);
    kv=a(9);
    %Calculamos los coeficientes de la matriz A según la ecuación 4.21.
    A21=((4*kf*(u/R))/(m*(x1^5)))+(2*kf_prima/(m*(x1^3)))+0;
    A22=0;
    A23=-(kf/m)*(1/(x1^4));
    A31=0;
    A32=-(kv/L)*(x1/((b^2)+(x1^2)^(5/2)));
    A33=-R/L;
    %Con todas las matrices determinadas numéricamente, calculamos la función de
    %transferencia del sistema en tiempo continuo según la ecuación 4.35.
    A=[0,1,0;A21,A22,A23;A31,A32,A33];
    B=[0;0;(1/L)];
    C=[1,0,0];
    D=[0];
    [b,c]=ss2tf(A,B,C,D);
    c=c/c(1);
    Ys=tf(b,c);
    %Con todas las matrices determinadas numéricamente, calculamos la función de
    %transferencia del sistema en tiempo discreto tomando T = 2,5ms.
    Yz=c2d(Ys,0.0025);
```

Listado. 3.1. Código utilizado para el cálculo de la función de transferencia

Ahora ya conocemos la relación que existe entre la tensión (U) y la posición (Y). De acuerdo al diagrama de bloques de la Figura 4.12 el siguiente punto a abordar es el sensor para así tener caracterizado todo el sistema en lazo abierto y poder diseñar un controlador que permita estabilizar este sistema, que en lazo abierto es inestable.

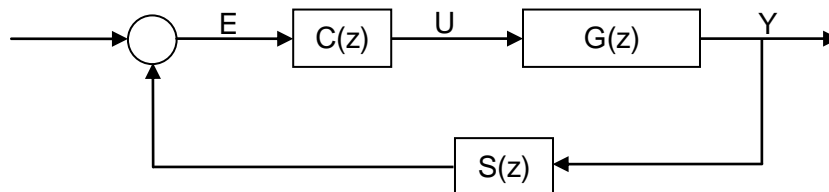


Fig. 12. Diagrama de bloques en lazo cerrado

4. Modelización con *Simulink*

Hoy en día, gracias a todas las herramientas informáticas disponibles es inconcebible ningún proyecto que tenga que implementarse y que no se simule previamente para garantizar su correcto funcionamiento antes de ponerlo en marcha en la realidad. En este proyecto se ha trabajado con *Simulink*, un módulo del *MATLAB*.

Una vez ya tenemos el modelo claro y se han determinado empíricamente los parámetros característicos de la planta podemos proceder con el proceso de simulación de su comportamiento.

4.1. Sistema en lazo abierto

La primera simulación que se llevó a cabo fue la del comportamiento del sistema en lazo abierto ya que resulta imprescindible conocer el comportamiento de la planta para poder diseñar un controlador que nos permita obtener los resultados deseados.

El diagrama de bloques se muestra en la Figura 13 y se ha obtenido a partir de la ecuaciones 4.1 y 4.12, las ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica de la planta.

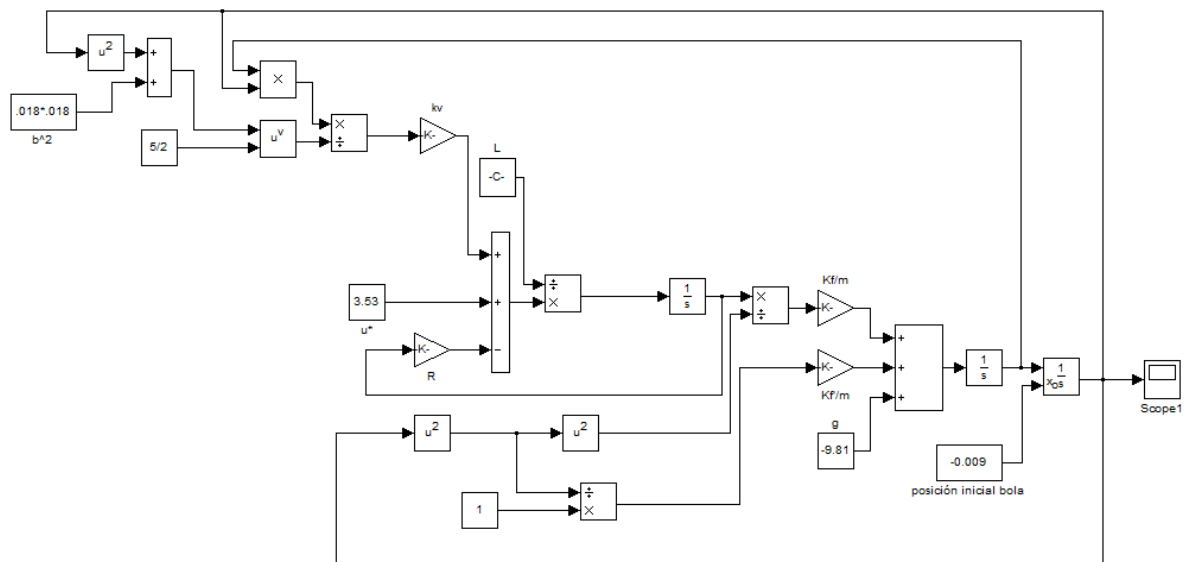


Fig. 13. Diagrama de bloques en lazo abierto

Si introducimos la tensión del punto de equilibrio y introducimos la posición inicial del objeto un poco por encima del punto de equilibrio ($-0,009\text{m}$) obtenemos la Figura 14:

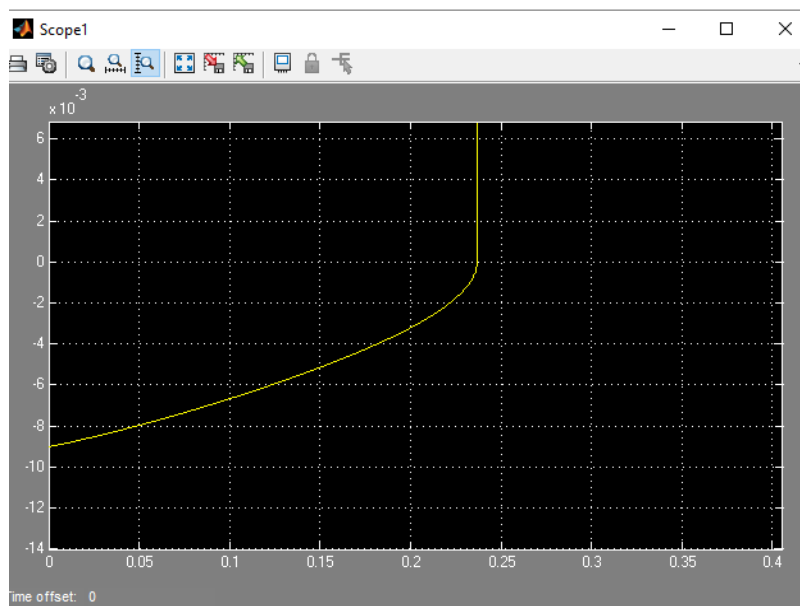


Fig. 14. Respuesta del sistema con la posición inicial por encima del punto de equilibrio

Si ahora introducimos la tensión del punto de equilibrio y asignamos la posición inicial del objeto un poco por debajo del punto de equilibrio (-0.012m) obtenemos la Figura 15:

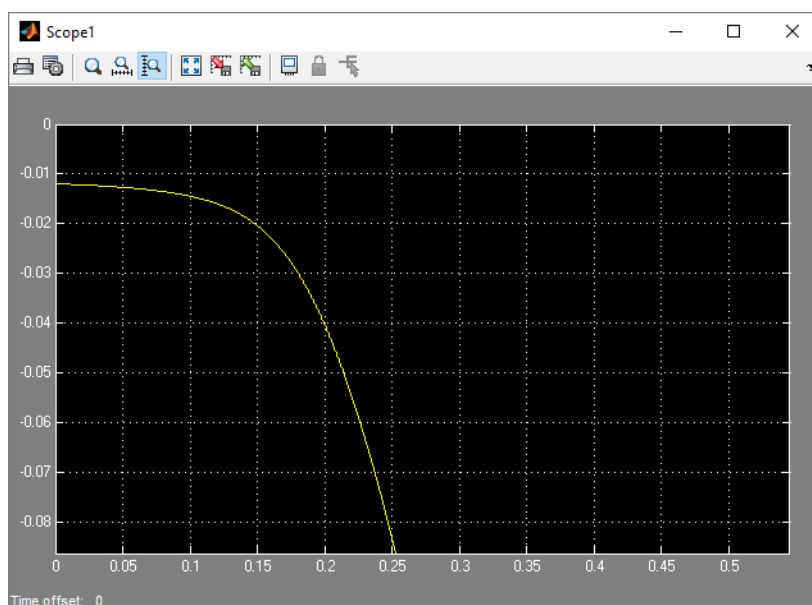


Fig. 15. Respuesta del sistema con la posición inicial por debajo del punto de equilibrio

Como se puede observar los resultados son coherentes con lo que obtendríamos si lleváramos a cabo el experimento en la realidad.

En este sistema la variable de entrada (de control) es la tensión suministrada al electroimán y la variable de salida es la posición del imán, tomando el origen de coordenadas en el punto más bajo del núcleo del electroimán.

Como se puede observar aparecen algunas diferencias respecto a la ecuación mencionada. Éstas no son significativas y son simplemente exigidas por el simulador para poder llevar a cabo la simulación de forma correcta: se ha añadido al segundo integrador la posición inicial del imán para poder llevar a cabo la simulación numéricamente.

4.2. Sistema en lazo cerrado

Ahora se ha cerrado el lazo de control introduciendo un bloque que es la consigna, el comparado, el muestreador y el PID discreto, obteniendo el diagrama de bloques de la Figura 16:

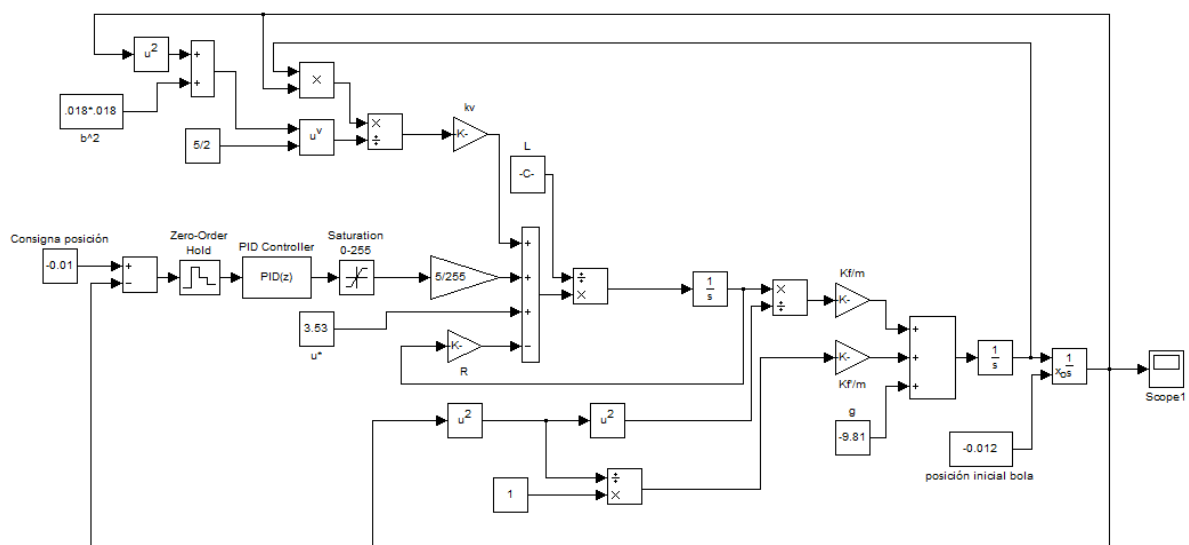


Fig. 16. Diagrama de bloques en lazo cerrado

El muestreador muestrea con un período de muestreo de 2,5ms, según se ha encontrado en el punto 7.2.1 de esta memoria. Además, en el bloque del PID se han introducido las constantes del controlador PI halladas en el punto 7.2.2.

Al ejecutar la simulación obtenemos la respuesta del sistema que aparece en la Figura 17, con lo que se obtiene que el sistema tiene una respuesta estable con el controlador PI.

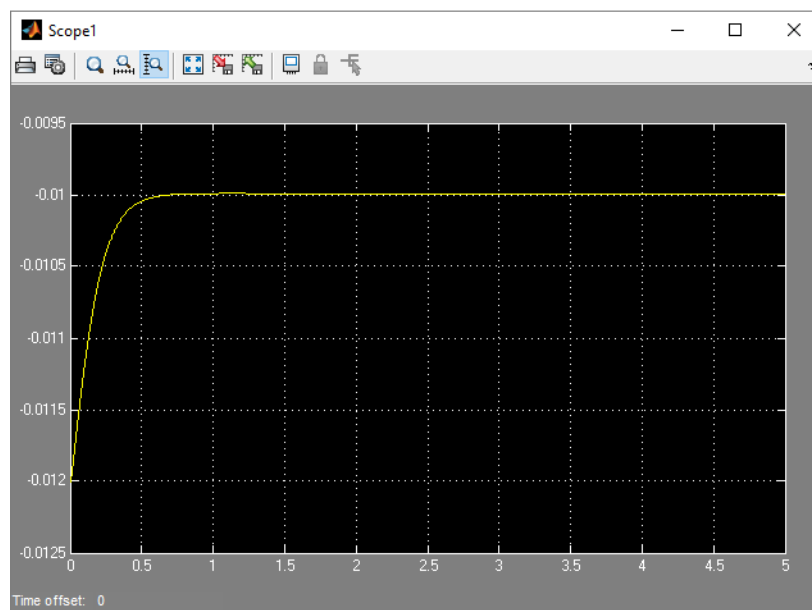


Fig. 17. Respuesta del sistema con el controlador PI

5. Partes del sistema

A continuación se procederá a desarrollar en detalle todo el trabajo llevado a cabo con cada una de las partes de la planta con tal de garantizar su correcto funcionamiento individualmente y su apropiado funcionamiento como sistema.

5.1. Actuador

El actuador es un solenoide sc de la marca Ralux de 8W de potencia nominal (12V y 0,67A) y es el que aparece en la Figura 18:

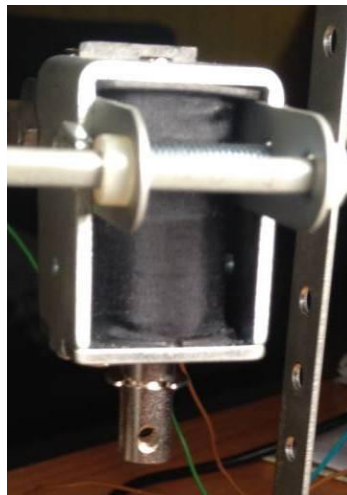


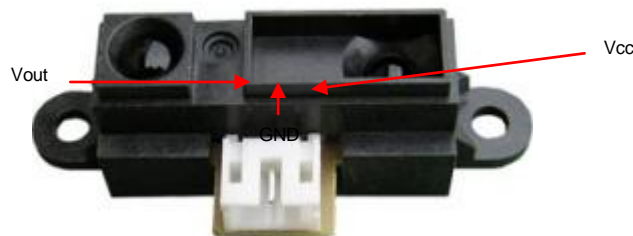
Fig. 18. Electroimán usado para hacer el levitador

Del actuador vale la pena destacar el gran efecto que tiene la temperatura sobre su rendimiento. Al cabo de unos 5 minutos de funcionamiento a la potencia nominal, debido al calentamiento del conductor, la resistencia de éste empieza a subir disminuyendo de forma considerable el rendimiento del electroimán. Además, también aumenta de forma muy considerable la temperatura del núcleo magnético, lo que también hace que sea menor el campo magnético que se establece a través suyo. A pesar de conocer este fenómeno, no ha sido necesario caracterizarlo matemáticamente, ya que el punto de trabajo del sistema en funcionamiento requiere una potencia mucho menor a la nominal, con lo que el efecto de la temperatura sobre el solenoide no resulta significativo pero es cierto que la limitación existe si se deseara otro régimen de funcionamiento más exigente en cuanto a potencia se refiere.

5.2. Sensor

El sensor ha sido una de las partes del sistema que más trabajo ha dado.

En primer lugar se decidió usar un **sensor de infrarrojos Sharp GP2Y0A21YK** ya que se disponía de uno en el laboratorio. El principio de funcionamiento de este sensor consiste en que dispone de dos diodos LED, uno emisor y el otro receptor. El emisor envía luz infrarroja y cuenta lo que tarda el haz de luz en ser detectado por el receptor, calculando así la distancia.



[17]

Fig. 19. Sensor de infrarrojos

Como se explica en el punto 8, haciendo pruebas se vio que no presentaba las características que buscábamos, con lo que se decidió cambiarlo y usar un sensor de efecto Hall lineal.

El sensor de efecto Hall lineal que se ha utilizado es el **Allegro A1301**. Como era de esperar, este sensor basa su funcionamiento en el efecto Hall. El efecto Hall sucede cuando tenemos sobre un material conductor un campo magnético y una corriente eléctrica perpendiculares entre ellas. El resultado es que se genera una tensión perpendicular a ambas llamada voltaje Hall [18]. En la Figura 21 está ilustrado el efecto Hall gráficamente:

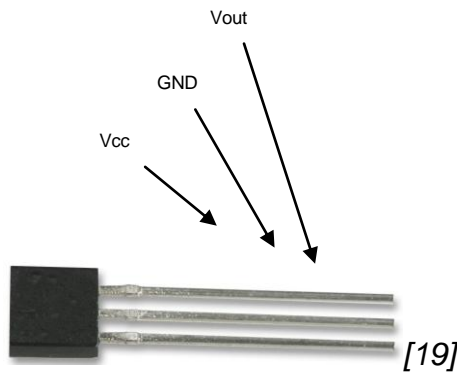


Fig. 20. Sensor de efecto Hall

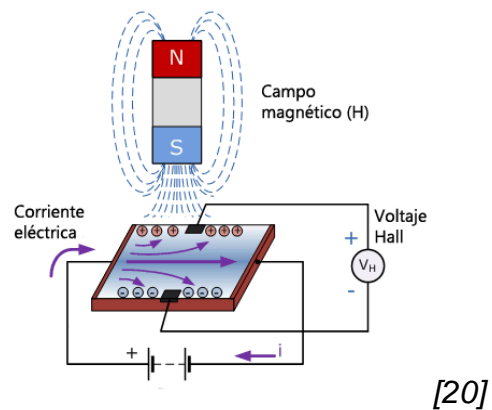


Fig. 21. Esquematzación efecto Hall

5.3. Arduino

Para llevar a cabo el control de la planta se ha decidido utilizar un Arduino Uno. Existe en internet muchísima información acerca de Arduino y además no es el objeto de este trabajo el explicar minuciosamente cada una de sus características, con lo que a continuación se presentarán brevemente únicamente aquellas que hayan resultados de interés para el desarrollo del proyecto.

El Arduino Uno es la unión de un microcontrolador y una gran variedad de periféricos. Presenta una serie de ventajas, entre las que destacan que es software libre, que es económico y que está pensado para iniciarse en el mundo de la electrónica y el control, siendo a la vez bastante completo y robusto. Quizás el único problema que presente es que no puedes depurar el código, que en caso de que extenso es un punto a favor.

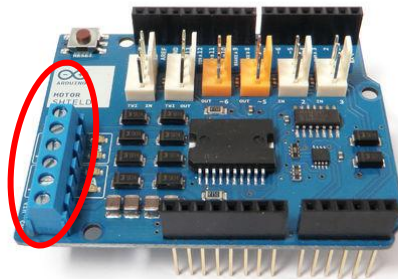
Entrando ya a las características técnicas que lo identifican, hay que destacar que se trata de un controlador digital, con lo que habrá que trabajar todo el tiempo en tiempo discreto.

Además permite hacer control de dispositivos analógicos mediante PWM (Pulse Width Modulation), el cual vamos a usar para controlar la tensión en bornes de la bobina.

El Arduino también es el dispositivo al que conectamos el sensor y del cual leemos una tensión proporcional a una posición. Hay que tener en cuenta que el Arduino coge esa tensión que recibe del sensor (entre 0V y 5V) y la codifica como un número entero entre 0 y 1023, con lo que se pierde algo de precisión pero nada que resulte remarcable.

5.4. Etapa de potencia (Motor Shield Arduino)

La etapa de potencia es la parte del sistema que me permite relacionar las señales de control (señal de salida del pin de PWM del Arduino, entre 0V y 5V y algunos miliamperios) con las señales de potencia (tensión en bornes de la bobina entre 0V y 5V y hasta 500mA, ya que estos son los máximos de un ordenador portátil). La etapa de potencia se conecta justo encima del Arduino, manteniendo todos los pines propios del Arduino pero añadiendo algunos propios de la etapa de potencia. Destacar los 6 pines (3 canales) que aparecen indicados en la Figura 22, donde un canal permite conectar una fuente de carga externa y los otros 2 canales (A y B) nos permiten conectar cargas que deseemos alimentar, pudiendo suministrar hasta un máximo de 12V y 2A por canal [21].



[21]

Fig. 22. Etapa de potencia

También hay que tener en cuenta que al conectar la etapa de potencia al Arduino algunos pines que antes estaban libres ahora pasan a estar reservados, según se observa en la Figura 23:

Function	<u>Channel A</u>	<u>Channel B</u>
Direction	Digital 12	Digital 13
Speed (PWM)	Digital 3	Digital 11
Brake	Digital 9	Digital 8
Current Sensing	Analog 0	Analog 1

[21]

Fig. 23. Pines reservados o con función predefinida de la etapa de potencia

5.5. Estructura de soporte

Finalmente nos queda hablar de la estructura de soporte del electroimán. Como en este proyecto se ha trabajado con levitación por atracción, ha sido necesario construir un soporte para poder situar el electroimán en la parte superior y que haga levitar el imán por atracción.

El resultado final es el que se observa en la Figura 24:



Fig. 24. Estructura de soporte del electroimán

La estructura está hecha con piezas de MECCANO y son metálicas pero esto no ha afectado al sistema porque únicamente es la estructura de soporte y no hay interacción entre el imán levitado y estas.

6. Construcción y experimentación

Una vez se tenían todos los componentes de la planta y el modelo estaba claro se empezó a construir el sistema para poder empezar a trabajar con él. En la Figura 6.24 ya se ha visto el aspecto final del sistema:

Una vez ya se tuvo la estructura de soporte montada se pudo empezar a determinar los parámetros característicos del modelo, proceso que ha quedado ampliamente explicado en el punto 4.4 de esta memoria.

6.1. Sensor

En cuanto al sensor, se empezó a trabajar con un sensor de infrarrojos. En primer lugar se buscó la ecuación que regía las lecturas del sensor y de la ficha técnica [22] se obtuvo la Figura 25:

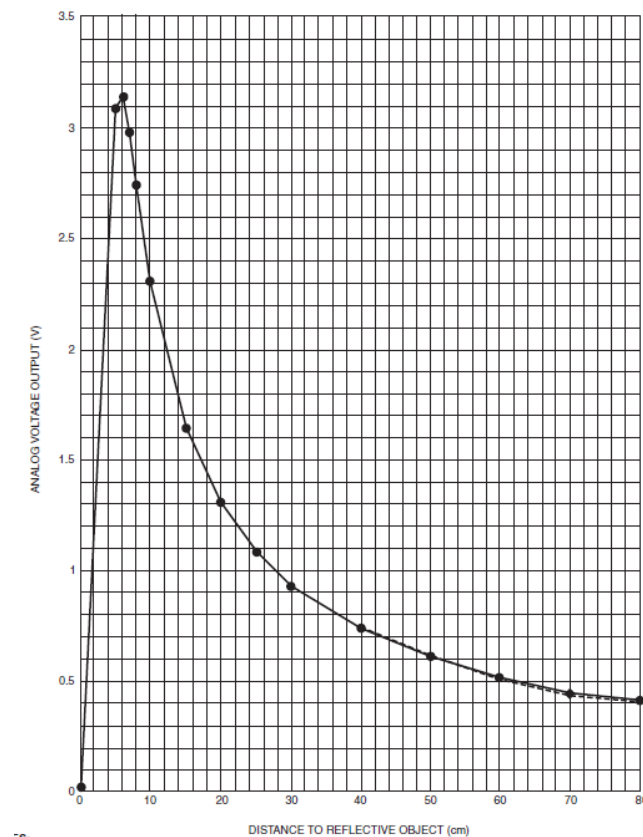


Fig. 25. Gráfico Tensión vs Distancia

De esta curva se encontró la siguiente ecuación matemática que caracterizaba el tramo exponencial [23]:

$$Dis\ tan\ cia = 16.746,73 \cdot V_{out}^{-1,2134} \quad (Ec. 6.38)$$

siendo V_{out} el valor codificado de la tensión entre 0 y 1023 correspondiente a una tensión entre 0V y 5V.

Llegados a este punto se decidió comparar el gráfico sacado de la ficha técnica, la ecuación 7.38 y el comportamiento real del sensor obteniendo la Figura 26. Para lograr obtener los valores reales del sensor se usó el código que figura en el Listado 7.2:

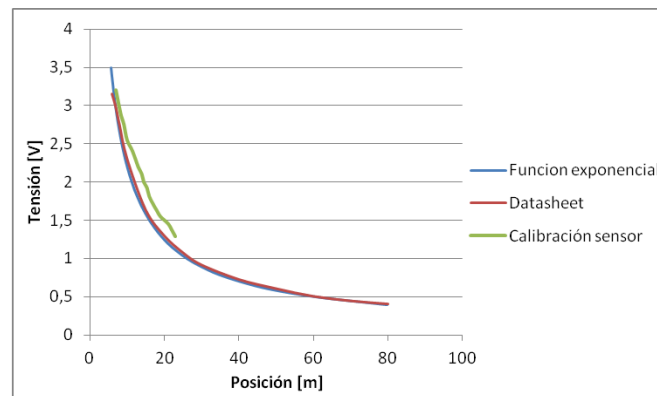


Fig. 26. Comparativo sensor

Como se puede observar la curva extraída de la ficha técnica del sensor y la función exponencial que la modeliza coinciden bastante pero ambas difieren considerablemente respecto el comportamiento real del sensor no se ajusta a ninguna de las dos y, además, durante la realización de estas medidas se ha observado que el sensor no presentaba demasiado buen comportamiento ante los cambios de posición del objeto en cuestión; es decir, la lectura de la posición de un objeto estático no es mala pero la lectura de un objeto con cierta velocidad se ha percibido a nivel cualitativo que presenta cierto retardo. Las imágenes que figuran a continuación, Figuras 27 y 28, pretenden ilustrar el montaje empleado y a su vez dejar constancia del proceso de trabajo seguido:

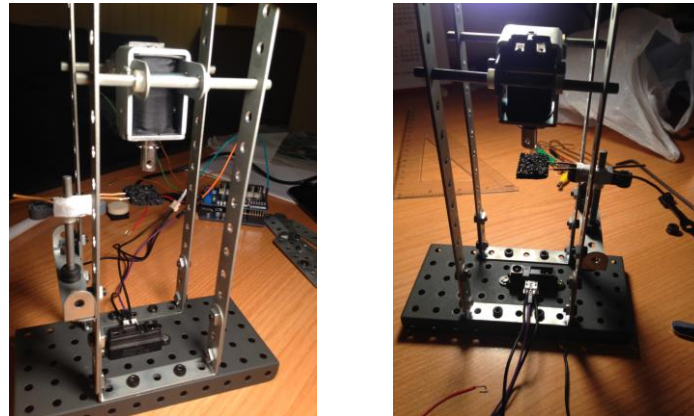


Fig. 27 y Fig. 28. Proceso de calibración del sensor

Se ha verificado posteriormente el tema del retardo mirando la ficha técnica donde se ha encontrado la siguiente tabla [22]:

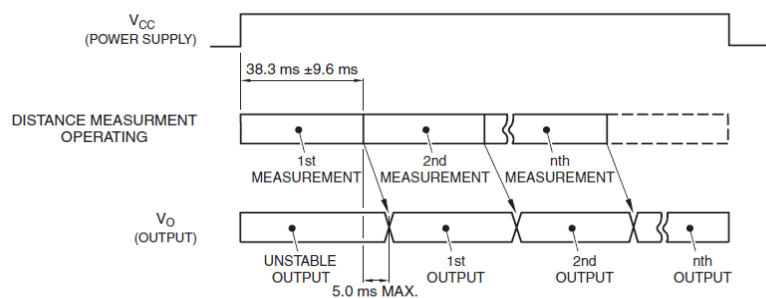


Fig. 29. Diagrama temporal

donde se puede observar que la señal puede llegar a presentar 40ms de retardo frente a un cambio de posición del objeto levitado, lo cual es demasiado.

A continuación se muestra el código usado para obtener las lecturas del sensor:

```
int sensor = A5;           //Asignamos el sensor al pin analógico 5.

void setup() {
    Serial.begin(9600);    //Iniciamos comunicaciones con el monitor serie a 9600
                           //baudios.
}

void loop() {
    int lectura, cm;
    lectura = analogRead(sensor);    //Leemos el valor del sensor.
    cm = pow(3027.4 / lectura, 1.2134);    //Hacemos la conversión a cm.
    Serial.print("Sensor 0: ");
    Serial.print(lectura);    //Sacamos por el monitor serie el valor en cm.
}
```

Lis. 6.2. Código utilizado para obtener las lecturas del sensor

Por todos estos motivos y al hacer la prueba y verificar que el sensor no cumplía con lo que se necesitaba se decidió cambiar el sensor y pasar a un sensor de efecto Hall.

El sensor de efecto Hall que se decidió usar es un sensor de efecto Hall lineal respecto al campo magnético. Con el sensor de efecto Hall surgió otro problema, y es que al ser un sensor sensible a campos magnéticos, la lectura del sensor era la suma de 2 aportaciones: por un lado estaba el campo magnético creado por la bobina y por otro lado estaba el campo del imán que levitaba.

Se procedió con la modelización del campo magnético de la bobina con el objetivo de conocer de forma precisa su comportamiento para poder restarlo al valor leído por el sensor y así poder quedar-nos con el valor debido al imán levitando y poder conocer su posición a través de este valor.

Para lograr esto se sometió el solenoide a una acción variable de PWM entre 150 y 254 que está representada en la Figura 30 por la curva de color azul. A partir de estos datos, de la lectura del sensor en cada instante de tiempo y también de la corriente que circulaba en cada instante se pudo sacar una función que se ajusta mucho a lo deseado, siendo ésta de la forma que aparece en la ecuación 7.39 y que en la Figura 30 está representada por la curva de color verde.

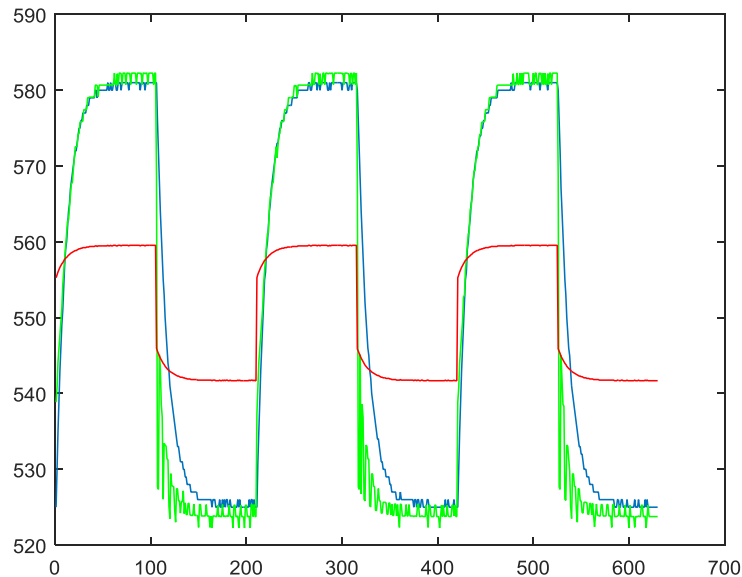


Fig. 30. Lectura sensor y modelos

$$lect_act = a * lect_ant + b1 * pwm + b2 * corriente + offset$$

$$a = 0,07637 \quad b2 = 1,505$$

$$b1 = 0,1306 \quad offset = 440$$

(Ec. 6.39)

Este modelo, a pesar de ser muy preciso, cuando se resta a la lectura del sensor provoca discontinuidades y saltos en la posición del sensor (obtenido como la diferencia entre la lectura del sensor y el modelo aproximado del campo generado por la bobina) debido a la amplitud considerable que presenta. Esto provoca que el sistema crea que el imán ha pasado de una posición a otra de forma instantánea, lo que lo inestabiliza. Por este motivo se ha decidido buscar un modelo que aunque no caracterice de forma tan precisa el campo generado por el solenoide, ofrezca mejor comportamiento del sistema. Se decidió coger el modelo y prescindir de la aportación de la corriente, que además resultó ser la que introducía el ruido, obteniéndose la curva roja de la Figura 30 y cuya expresión aparece en la ecuación 7.40:

$$\begin{aligned} lect_act &= a * lect_ant + b1 * pwm + offset \\ a &= 0,07637 \quad b1 = 0,1306 \quad offset = 482 \end{aligned} \quad (\text{Ec. 6.40})$$

Como se observa, el cambio más sustancial es la diferencia de amplitud que existe ahora entre los valores medidos (curva azul) y el modelo (curva roja). Esto supone introducir un error, que por otro lado es asumible porque en el caso extremo en lugar de la medida real, 580, se estaría restando 560, siendo el error relativo únicamente del 3%. Gracias a este nuevo modelo, el valor de la posición cambia de forma mucho más continua y suavizada, con lo que favorece a la dinámica global del sistema y no afecta a su estabilidad.

Por último, únicamente nos queda por conocer la función de transferencia del sensor. Se ha considerado que el sensor sólo presenta una ganancia, ya que su dinámica es suficientemente rápida como para no tener efecto alguno sobre el comportamiento de la planta. Para garantizar que el valor calculado es el adecuado, se va a calcular a partir de la tensión y la distancia del punto de equilibrio, con lo que de este modo estamos linealizando el comportamiento del sensor alrededor del punto de equilibrio elegido. Para hallar la ganancia del sensor, k_s , se realizaron los cálculos que figuran en la ecuación 7.41:

$$\begin{aligned} u^* &= -K \cdot x_1^* \rightarrow K = -\frac{1,271 V}{0,01 m} \approx -127 \frac{V}{m} \\ u' &= k_s \cdot u \rightarrow u' = \frac{1023}{5} \cdot K \cdot u \rightarrow k_s \approx \frac{1023}{5} \cdot (-127) \approx -26.000 \end{aligned} \quad (\text{Ec. 6.41})$$

Hay que comentar un detalle a modo de aclaración:

-En primer lugar vemos que k_s es negativa. Esto es debido a que en el sistema de referencia del sensor, su origen de coordenadas está en el propio sensor, con lo que si un

Δx negativo (anos acercamos al sensor) genera un Δu positivo (al estar más cerca, el valor del campo magnético es mayor y la tensión de salida es proporcional al valor del campo) y por esto la constante debe ser negativa.

Con esta información ya conocemos el carácter de las lecturas del sensor, con lo que ya nos podemos centrar en hallar un controlador que nos permita estabilizar el sistema.

6.2. Controlador

El controlador que se ha decidido utilizar es un controlador PID y el estudio que se va a llevar a cabo es cuál de las combinaciones básicas posibles (P, PI, PD, PID) son factibles y en caso de haber más de una, cuál hace que el sistema presente un mejor comportamiento. Se hará en ese orden ya que iremos del controlador más sencillo al más complejo.

La forma más genérica de expresar la estructura de un controlador PID discreto es la que se presenta en la ecuación 7.42 según [24]:

$$C(z) = K_p + K_i \cdot \frac{z}{z-1} + K_d \cdot \frac{z-1}{z} \quad (\text{Ec. 6.42})$$

En primer lugar necesitamos conocer la función de transferencia en lazo abierto con tal de poder aplicar alguno de los criterios (Root Locus, Jury, etc) para conocer la estabilidad del sistema en lazo cerrado según el controlador usado.

Si denominamos a la función de transferencia en lazo cerrado $H(z)$ y a la función de transferencia en lazo abierto $L(z)$, podemos hallar $L(z)$ según la ecuación 7.43:

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z) \cdot S(z)} = \frac{G(z)}{1 + L(z)} \quad (\text{Ec. 6.43})$$

Con lo que realizando los cálculos obtenemos:

$$L(z) = \frac{(+13.299.530 z^2 + 7.541.170 z + 2.964) \cdot 10^{-8}}{z^3 - 1,188 z^2 + 0,1738 z - 4,823 e - 18} \quad (\text{Ec. 6.44})$$

6.2.1. Controlador P

Empezaremos con el controlador P, ya que es el más simple y siempre interesa que un controlador sea lo más sencillo posible. Su estructura se describe según la ecuación 7.45:

$$C(z) = K_p \quad (\text{Ec. 6.45})$$

Para verificar si este sistema puede estabilizarse con un controlador P se utilizará el método del Root Locus. Si representamos el lugar geométrico de las raíces de $L(z)$ con *Matlab* obtenemos la Figura 31:

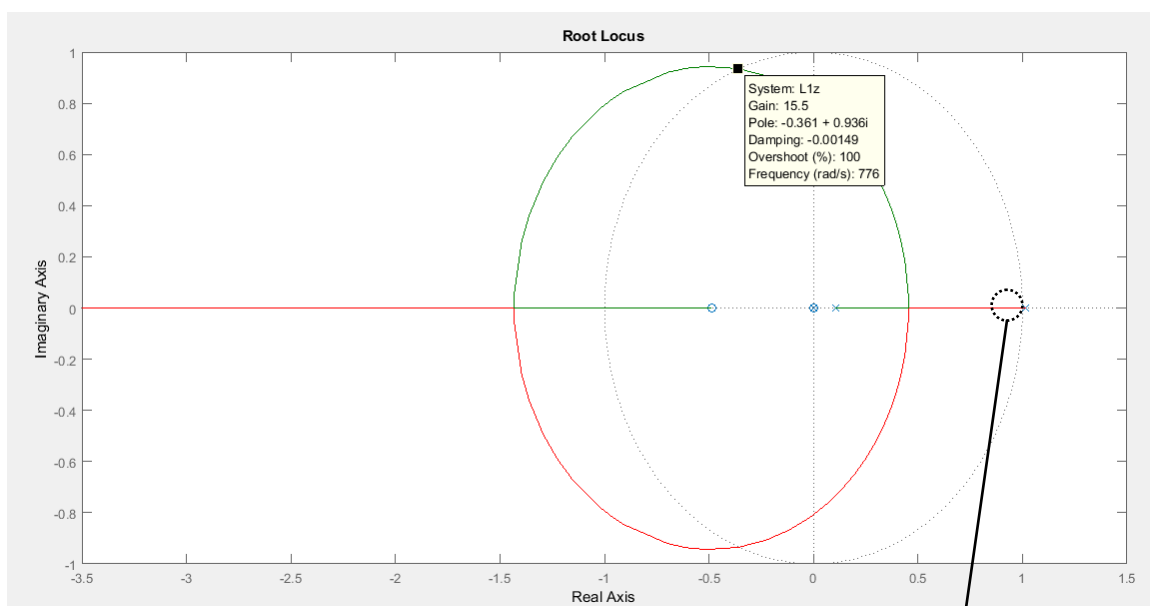


Fig. 31. Root Locus per un controlador P

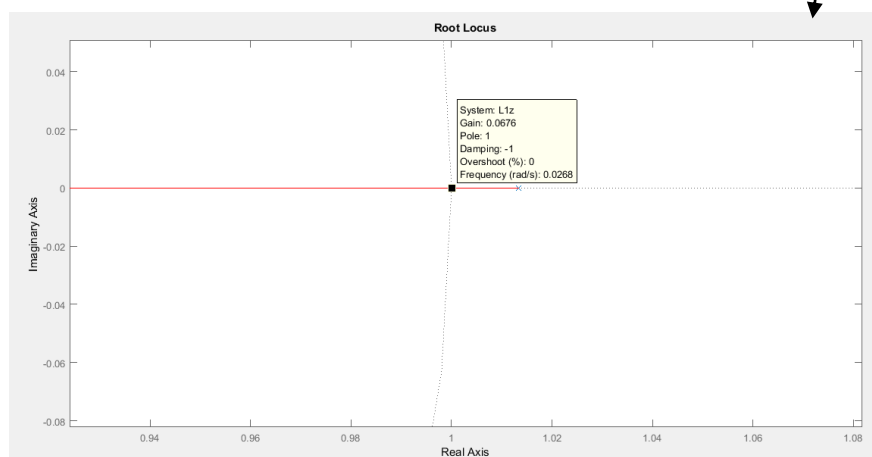


Fig. 32. Ampliación zona indicada Root Locus

Como se puede observar, según las Figuras 31 y 32, el sistema es controlable para cualquier k_p entre 0,07 y 15,5 aproximadamente.

Ante esta situación se llevará a cabo la implementación en la realidad con un controlador P. Para ello se ha utilizado el código en Arduino que figura en el Listado 7.3, comentado para una mejor comprensión:

```
//Primero creamos las variables que vamos a necesitar para trabajar.
int pwm = 0;
float ki = 0;
float kp = 5;
float kd = 0;
float integral = 0;
int consigna = 260;
float error;
float t1;
float t2;
float lasterror;

void setup() {
    Serial.begin(115200); //Iniciamos comunicaciones con el monitor serie
                          //de Arduino a 115.200 baudios para visualizar los
                          //resultados.
    TCCR2B = 1;          //Definimos la frecuencia del PWM a 31,25kHz.
}

void loop() {
    t1 = micros();       //Empezamos a contar el tiempo.
    float a;
    float b1;
    float off;
    float x;
    a = 0.07637;          //Definimos el valor de los coeficientes del
    b1 = 0.1306;          //polinomio que aproxima el campo de la bobina
    off = 0.0482e4;        //según la ecuación 7.40.

    int lectura;
    float pos;
    int corriente;
    lectura = analogRead(5); //Obtenemos la lectura del sensor.
    corriente = analogRead(0); //Obtenemos la lectura de corriente de la etapa
                              //de potencia.

    x = a*x+b1*pwm;
    pos = lectura-x-off;

    error = consigna-pos; //Calculamos el error respecto a la consigna.
    integral = integral+error*0.2; //Calculamos parte integral del PID.
    if(integral > 600){integral = 600;} //Limitamos el valor de la integral
    if(integral < -300){integral = -300;} //para evitar efecto wind-up.
    pwm = kp*error+ki*integral+kd*(error-lasterror); //Calculamos la
                                                    //acción necesaria según el
                                                    //error.

    if(pwm > 255){pwm = 255;}
    if(pwm < 0){pwm = 0;}
    analogWrite(3,pwm); //Escribimos la acción a realizar en el puerto
```

```

digital 3,el que controla la tensión del
electroimán.

Lasterror = error;

Serial.print(pwm);           //Mostramos por el monitor serie la acción que
Serial.print("\t");          estamos haciendo, la posición del imán levantado
Serial.print(pos);           leído por el sensor, la componente integral del
Serial.print("\t");          controlador, la consigna de posición y,
Serial.print(integral);      finalmente, el tiempo que tarda en ejecutar un
Serial.print("\t");          loop, en nuestro caso coincide con el tiempo de
Serial.print(consigna);      muestreo.
Serial.print("\t");
Serial.print((t1-t2)/10);
Serial.println("");
t2 = t1;
}

```

Lis. 6.3. Código utilizado para control del sistema

En primer lugar se puede observar que en el código que aparece en el Listado 7.3 ya está implementado un controlador PID genérico contemplando la posibilidad de que actúen las 3 componentes y que lo que se hace es dar un valor distinto de cero a las componentes que se desea que aparezcan.

Si miramos con un poco más de atención podemos darnos cuenta de cómo están hechas tanto la parte integral como la parte derivativa del controlador, resultando interesante detenernos un minuto para profundizar un poco más en ello. Si empezamos con la parte integral del controlador se ve que el cálculo se realiza según la ecuación 7.46:

$$\begin{aligned}
 I_k &= I_{k-1} + 0,2 \cdot E_k \\
 PWM - i_k &= k_i \cdot I_k
 \end{aligned}
 \quad (Ec. 6.46)$$

Como se observa el valor de la acción integral en un instante k es la combinación de la acción integral en el instante k-1 más el error en el instante k multiplicado por un coeficiente. Este coeficiente nos permite controlar la velocidad de integración (la velocidad con que crece la integral) y se ha hallado empíricamente para mejorar la respuesta del sistema. Si ahora expresamos esto como una función de transferencia en z, obtenemos la expresión final de la ecuación 7.47:

$$\begin{aligned}
 I_k &= I_{k-1} + 0,2 \cdot E_k \rightarrow I_k - I_{k-1} = 0,2 \cdot E_k \rightarrow I - I \cdot z^{-1} = 0,2 \cdot E \\
 I \cdot (1 - z^{-1}) &= 0,2 \cdot E \rightarrow \frac{I}{E} = \frac{0,2}{1 - z^{-1}} \rightarrow \frac{I}{E} = \frac{0,2z}{z - 1} \\
 \frac{PWM - i_k}{E} &= k_i \cdot \frac{0,2z}{z - 1}
 \end{aligned}
 \quad (Ec. 6.47)$$

Si ahora nos fijamos en la parte derivativa del controlador PID observamos que el cálculo se ha realizado según la ecuación 7.48:

$$PWM_d_k = k_d \cdot (error_k - error_{k-1}) \quad (\text{Ec. 6.48})$$

donde si realizamos el mismo procedimiento que para la componente integral llegamos a la expresión final de la ecuación 7.49:

$$\begin{aligned} D_k &= k_d \cdot (E_k - E_{k-1}) \rightarrow D = k_d \cdot (E - E \cdot z^{-1}) \\ D &= k_d \cdot E \cdot (1 - z^{-1}) \rightarrow \frac{D}{E} = k_d \cdot (1 - z^{-1}) \rightarrow \frac{D}{E} = \frac{k_d \cdot (z - 1)}{z} \\ \frac{PWM_d_k}{E} &= \frac{k_d \cdot (z - 1)}{z} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 6.49})$$

Si volvemos al código que figura en el Listado 7.3, observamos que aparecen las variables t1 y t2. Estas variables se usaron únicamente para poder calcular el tiempo que tardaba el programa en hacer un loop para poder conocer así el tiempo de muestreo, que vale $T = 2,5\text{ms}$.

Además también se puede apreciar que se limita la acción de la componente integral, haciendo que el valor sature a una cota superior e inferior. Esto se ha hecho para evitar el conocido efecto wind-up, que tiene lugar cuando se está mucho tiempo por encima o por debajo de la consigna haciendo que el valor de la integral se dispare hacia un sentido u otro y provocando inestabilidad en nuestro sistema.

Otra observación es que también se ha limitado el valor de la acción de control a través del PWM entre 255 y 0, ya que son los límites físicos que presenta el controlador, siendo 255 el 100% y 0 el 0% de acción del PWM. Existía la posibilidad de invertir el sentido de la corriente pudiendo lograr una acción que trabajara entre 255 y -255 pero esto hubiera supuesto mayor complicación en el código del controlador y se verificó que actuando entre 255 y 0 ya se obtenían resultados satisfactorios.

También se aprecia que la variable consigna no es una distancia, sino que en realidad es el valor leído por el sensor: es decir, cuando obtenemos la lectura del sensor y le restamos la componente debida a la acción del campo generado por el solenoide, el valor que nos queda es el que comparamos directamente con la consigna, con lo que estamos comparando tensiones entre 0V y 5V codificadas como un valor entero entre 0 y 1023.

Por último, también fijarnos en que se define que la frecuencia de trabajo del PWM sean 31,25kHz, es decir, al máximo. Por defecto, el PWM del Arduino trabaja a 490Hz pero

cuando se hizo la prueba con la frecuencia de trabajo por defecto, se apreció que el sensor era capaz de captar en gran medida la señal del PWM no como una tensión “media” sino como pulsos, con lo cual al restar a la lectura del sensor el modelo aproximado del campo magnético generado por la bobina, los valores de posición pasaban a tener mucho ruido y una gran oscilación. Por este motivo, se pensó en primera instancia introducir un filtro pasa-bajos pero la frecuencia era demasiado baja. Por este motivo lo que se hizo fue cambiar la frecuencia de trabajo del PWM de 490Hz a 31,25kHz, para ver si con este aumento de frecuencia y la dinámica pasa-bajos de la planta ayudan permitiendo lograr una lectura del sensor más estable y con menos ruido.[25]

Con las Figuras 33 y 34 se puede apreciar la diferencia entre trabajar a 490Hz y 31,25kHz respectivamente. La única diferencia es la frecuencia, todo el resto de parámetros son comunes en ambos casos. La curva roja horizontal representa la consigna, la curva naranja es la posición real del imán que levita y la curva azul es la acción de control codificada como un valor de PWM entre 255 y 0.

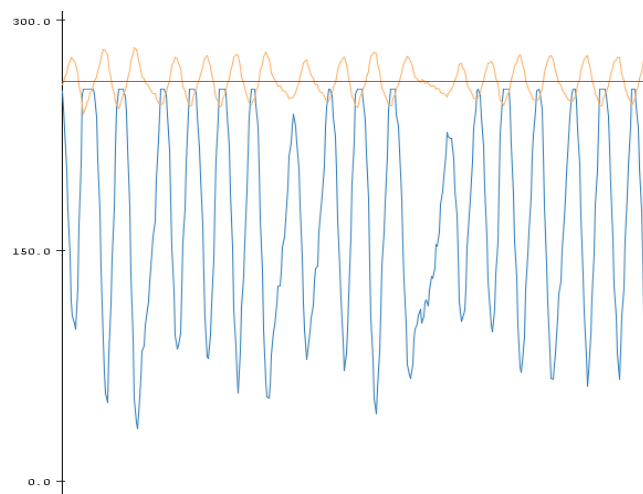


Fig. 33. Sistema trabajando a PWM=490Hz

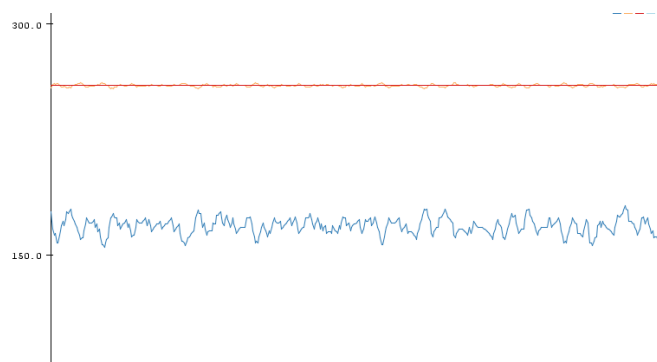


Fig. 34. Sistema trabajando a PWM=31,25kHz

Además con esta modificación hubo que recalcular todos aquellos parámetros característicos del sistema que presentan una dependencia con la frecuencia, según la metodología explicada en el punto 4.4 de esta memoria.

Si ahora retomamos el hilo del controlador P que según el Root Locus de la función de transferencia en lazo abierto estabiliza el sistema para un valor entre 0,07 y 15,5 aproximadamente, se ha decidido tomar un valor inicial de $k_p = 5$ para probar el controlador en la planta real y el resultado obtenido es la Figura 35, donde la línea azul horizontal representa la consigna deseada, la línea naranja representa la posición real del imán y la línea azul de la parte inferior representa la acción de control que realizamos, codificada como un valor de PWM entre 255 y 0.

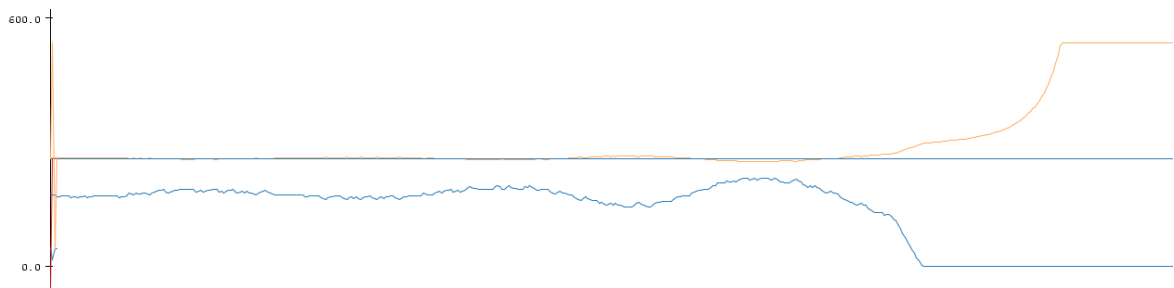


Fig. 35. Respuesta del sistema para $k_p = 5$

Como se puede observar, el sistema es inestable, ya que la oscilación se va magnificando y finalmente el imán abandona el valor de consigna y se adhiere al núcleo magnético del electroimán.

Ante este resultado se empezó a experimentar con distintos valores de k_p para ver cuál era la respuesta del sistema. Haciendo pruebas finalmente se ajustó el controlador P a un rango de valores de k_p para los cuales el sistema era estable. Este rango empezaba alrededor de $k_p = 8,5$ y terminaba alrededor de $k_p = 11,75$, obteniéndose para valores entre 9 y 11 los mejores resultados.

Si nos fijamos en la Figura 36 podemos ver la respuesta del sistema para un valor de k_p comprendido entre 9 y 11:

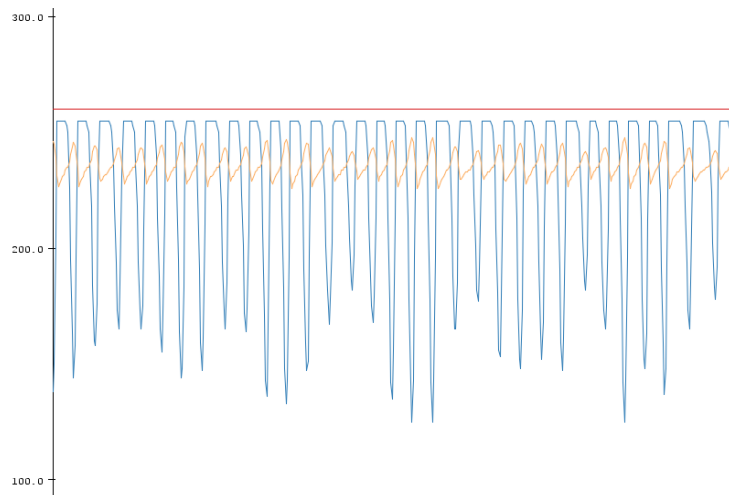


Fig. 36. Respuesta del sistema para $k_p = 9 - 11$ y offset PID = 0

donde la línea roja horizontal representa la consigna, la línea naranja representa la posición real del sensor y la línea azul representa la acción de control que realizamos, codificada como un valor de PWM entre 255 y 0. Como se observa, tanto la respuesta como la acción presentan una oscilación considerable y aunque el sistema es capaz de levitar de forma estable, debido a está oscilación, si aparece cualquier pequeña perturbación el sistema se inestabiliza inmediatamente, con lo cual el sistema es estable pero no robusto ante perturbaciones que provengan del exterior.

Además, para lograr que la el imán se estabilizara en la consigna hubo que añadir un offset a la acción de control de valor 180 (valor para el cual se consigue el equilibrio), valor alrededor del cual trabajaba el controlador P según el signo y el módulo del error, con lo que se logró pasar de la respuesta de la Figura 36 a la respuesta de la Figura 37.

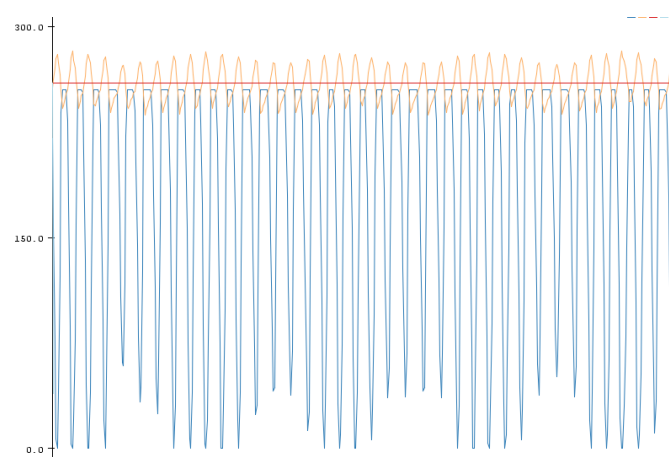


Fig. 37. Respuesta del sistema para $k_p = 9 - 11$ y offset PID = 180

Hay que destacar un fenómeno que de otro modo pasaría desapercibido y es que el rango de valores presentado en el párrafo anterior es el que se halló en el día que se llevó a cabo la experimentación pero se ha realizado la misma prueba distintos días y no se han hallado los mismos resultados de forma exacta, ya que el sistema no es inmutable y cada día que se experimenta con él presenta pequeñas diferencias respecto al resto de experimentos debido a la multitud de parámetros externos que influyen en el sistema y que no son los mismos de una tanda de experimentos a otra, aunque sí que se ha intentado que las alteraciones fueran las mínimas posibles y se han descartado todos aquellos resultados que presentaban diferencias considerables respecto al resto de medidas.

Si nos fijamos ahora en la Figura 38 podremos ver la respuesta del sistema para un valor de $k_p = 8,5$:

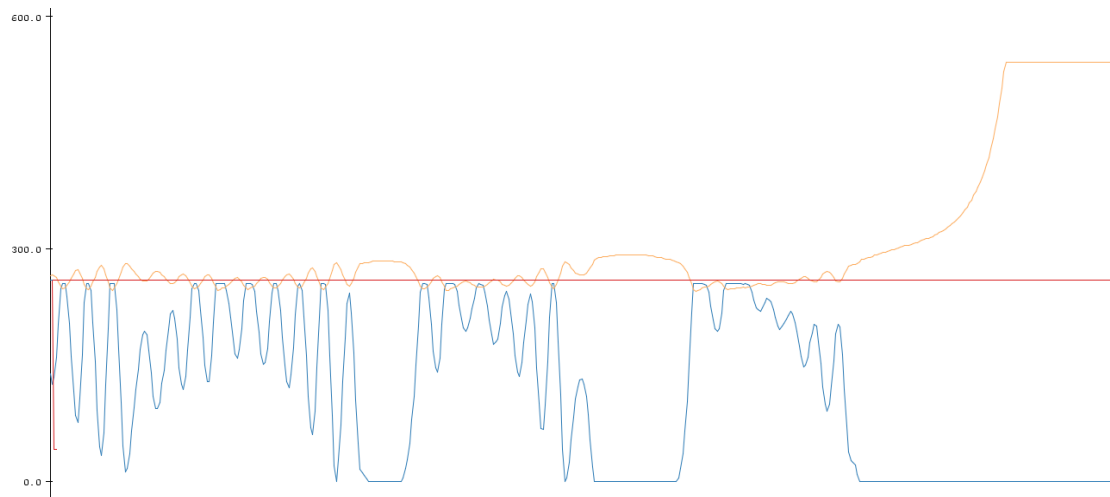


Fig. 38. Respuesta del sistema para $k_p = 8,5$

El código de colores es el mismo que para la Figura 36 y en este caso podemos observar los instantes previos a que el sistema se inestabilice pero esto no sucede inmediatamente después de soltar el imán sino pasado algún tiempo, con lo que el valor límite inferior de k_p debe ser levemente superior a 8,5, teniendo presente lo mencionado anteriormente sobre la variabilidad natural que presenta el sistema.

Finalment, si asignamos a k_p un valor de 11,75, la respuesta del sistema que se obtiene es la que aparece en la Figura 39:

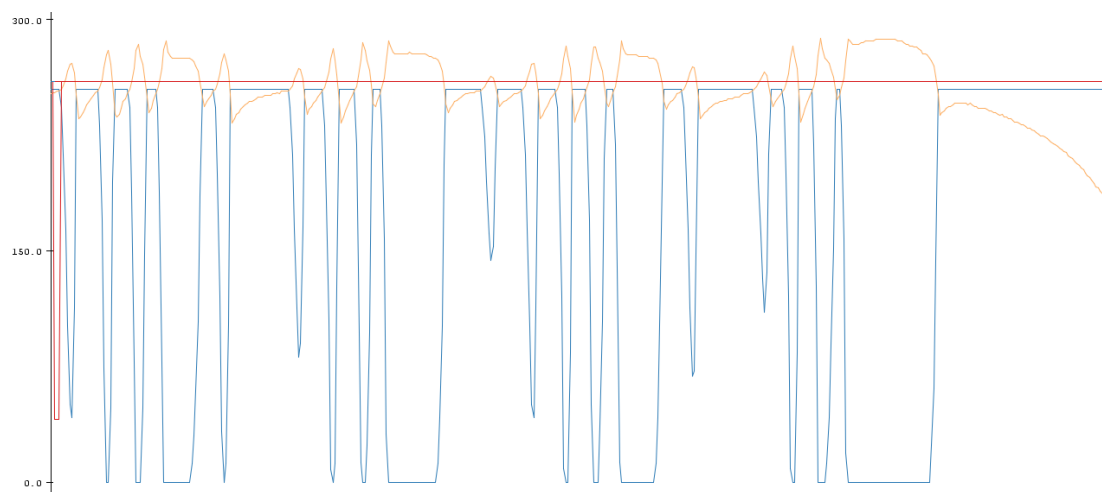


Fig. 39. Respuesta del sistema para $k_p = 11,75$

Nuevamente, el código de colores es el mismo que para la Figura 36 y en este caso podemos observar los instantes previos a que el sistema se inestabilice pero al igual que en el caso de $k_p = 8,5$ esto no sucede inmediatamente, con lo que el valor límite superior de k_p debe ser levemente inferior a 11,75, teniendo presente lo mencionado anteriormente sobre la variabilidad natural que presenta el sistema.

Lo lógico es ahora comparar estos valores hallados empíricamente con los valores hallados a través del modelo matemático y el Root Locus. Por un lado, teníamos que según el modelo, el sistema era estable para los valores que figuran en la ecuación 7.50:

$$k_p \approx [0,07 ; 15,5] \quad (\text{Ec. 6.50})$$

Por otro lado, tenemos el rango de valores hallados experimentalmente y que aparecen en la ecuación 7.51:

$$k_p \approx [8,5 ; 11,75] \quad (\text{Ec. 6.51})$$

Como se puede ver los valores no coinciden, lo que por otra parte es lógico, ya que una cosa es determinar un modelo que aproxime el sistema y otra cosa es el sistema real. La lectura positiva que se puede sacar de estas discrepancias es que a pesar de las diferencias numéricas entre los rangos de valores, la tendencia de los valores es la misma, es decir, existe un rango de valores central que estabilizan el sistema ofreciendo la mejor respuesta del sistema pero si nos desplazamos en el valor de k_p demasiado hacia cualquiera de los 2 sentidos inestabilizamos el sistema. Además, otra apreciación interesante es que el rango empírico es más estrecho que el teórico, lo que nos indica que

en la realidad resulta más complicado estabilizar el sistema, sobre todo a las perturbaciones externas que sí afectan al sistema real pero que no están contempladas en el modelo teórico. A todo ello hay que añadir el error humano en la determinación empírica de los parámetros y constantes del sistema y las simplificaciones aplicadas para obtener un modelo manejable.

Pese a haber logrado estabilizar el sistema en el valor de la consigna, tanto la posición del imán como la acción de control presentaban una enorme oscilación y como esto no es conveniente, se va a buscar un controlador que ofrezca una mejor respuesta del sistema.

6.2.2. Controlador PI

A partir del controlador P que acabamos de hallar comenzaremos a buscar un controlador PI que mejore la respuesta del sistema y se va a buscar un PI porque es el más sencillo después del controlador P.

Para hacer esto, al disponer de una función multivariable con dos variables a determinar, k_p y k_i , se va a utilizar el método de búsqueda univariante, que consiste en fijar todas las variables menos una y buscar el valor más óptimo para la variable que hemos dejado libre y luego volver a fijar todas las variables menos una distinta de la de la iteración anterior y repetir el proceso. En nuestro caso, al disponer únicamente de dos parámetros a determinar y al disponer ya de un valor de k_p , se empezará fijando $k_p = 10$ y buscando un valor óptimo de k_i . Una vez hallado éste, fijaremos k_i y aplicaremos el mismo procedimiento a k_p y así sucesivamente hasta hallar una pareja de valores que nos proporcione una respuesta del sistema aceptable.[26]

Aplicando esta metodología llegamos finalmente a que los valores más óptimos hallados son los que aparecen en la ecuación 7.52:

$$k_p = 5 \quad k_i = 6 \quad (\text{Ec. 6.52})$$

En la Figura 7.40 encontramos el valor de consigna, la lectura del sensor de la posición y la acción de control representadas respectivamente por las curvas roja, naranja y azul. Como se puede observar, la posición del imán es bastante estable y la acción de control, pese a presentar cierta oscilación, está bastante acotada.

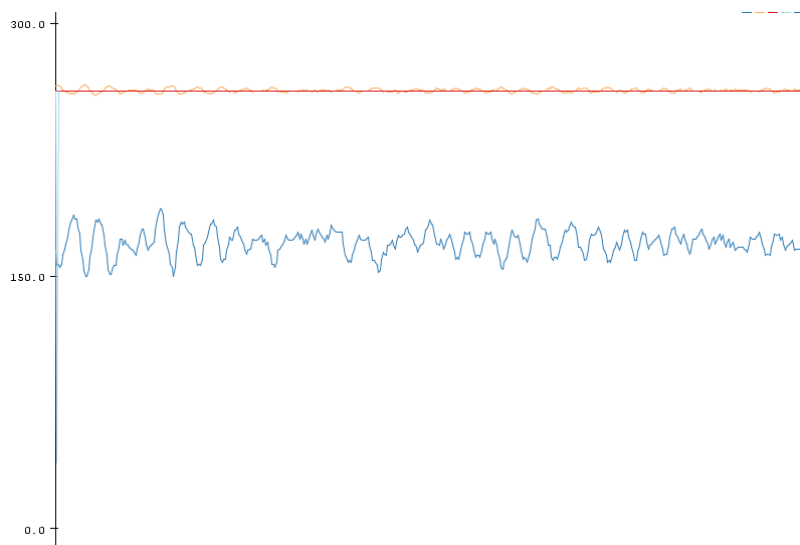


Fig. 40. Respuesta del sistema para $k_p = 5$ y $k_i = 6$

Si comparamos el controlador P con el controlador PI, representados en las Figura 37 y Figura 40 respectivamente, podemos apreciar la gran mejora introducida por el controlador PI. Hemos logrado una posición mucho más estable del imán levitado y una acción de control si bien oscilante, mucho más acotada y controlada.

A continuación se hallan una serie de figuras que pretenden ilustrar la exploración experimental de valores de k_p y k_i que se hizo y la respuesta dinámica del sistema para cada pareja de valores probados.

En primer lugar se fijó el valor de k_i y se buscaron los valores límite de k_p .

En la Figura 41 podemos ver que para un valor de $k_p = 4,5$ el sistema es inestable, con lo que el valor límite inferior de k_p es un valor cercano a 4,5 pero un poco superior en módulo.

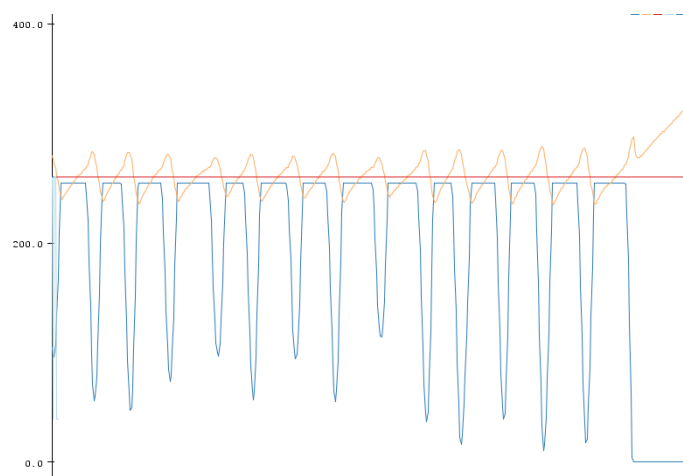


Fig. 41. Respuesta del sistema para $k_p = 4,5$ y $k_i = 6$

En la Figura 42 vemos la respuesta para $k_p = 6$ y $k_i = 6$, donde el sistema es inestable.

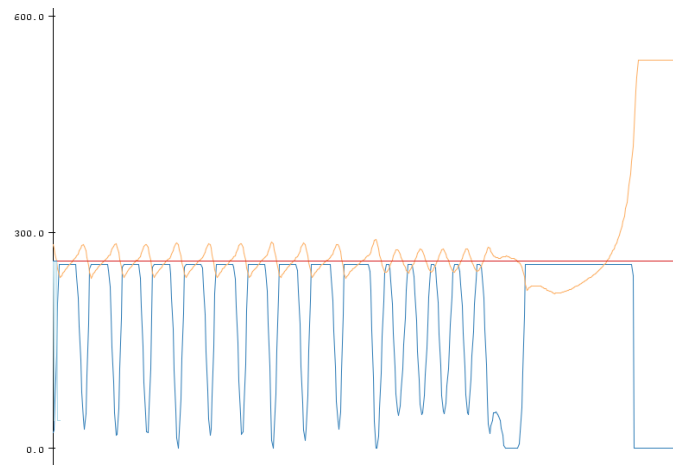


Fig. 42. Respuesta del sistema para $k_p = 6$ y $k_i = 6$

Con esto podemos concluir que el valor límite superior de k_p se halla en un valor cercano a 6 pero algo inferior en módulo, con lo cual, si mantenemos el valor de k_i fijo en 6 y vamos variando el valor de k_p , podemos movernos en el rango que aparece en la ecuación 7.53:

$$k_i = 6 \rightarrow k_p \approx [4,5 ; 6] \quad (\text{Ec. 6.53})$$

Por último, en la Figura 43 observamos la respuesta del sistema para $k_p = 5,5$ y $k_i = 6$. Esta combinación genera una respuesta del sistema curiosa, al ser muy parecida a la que obtuvimos en la Figura 37 únicamente con un controlador P.

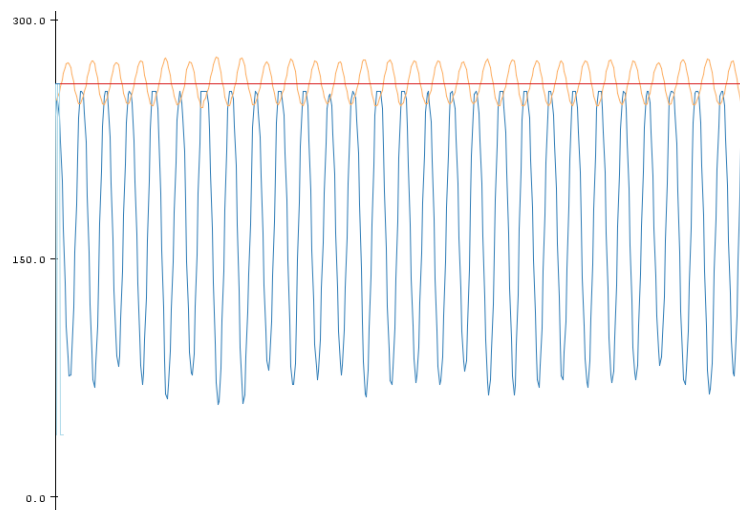


Fig. 43. Respuesta del sistema para $k_p = 5,5$ y $k_i = 6$

Si ahora procedemos al revés, fijando k_p y explorando los valores posibles de k_i , hallaremos el rango de trabajo válido de k_i .

Se empezó con $k_p = 5$ y $k_i = 6,5$, siendo la respuesta del sistema la que aparece en la Figura 44:

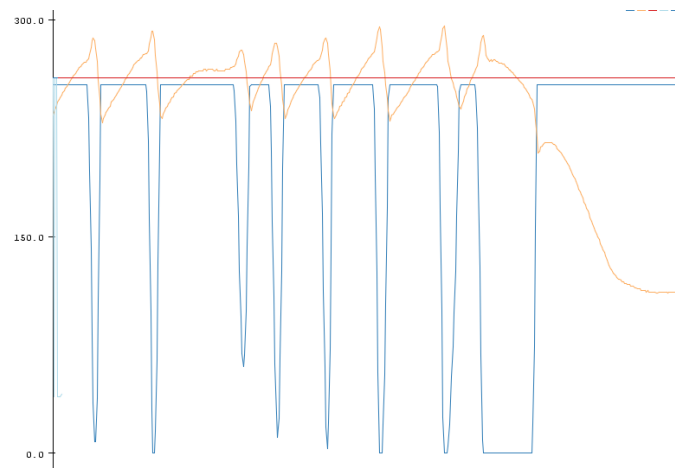


Fig. 44. Respuesta del sistema para $k_p = 5$ y $k_i = 6,5$

Como se puede ver el sistema acaba inestabilizándose, con lo que el valor límite superior de k_i que permite estabilizar el sistema es un valor un poco inferior a 6,5.

Si ahora mantenemos k_p a 5 y buscamos el valor límite inferior encontramos que para $k_i = 3,5$ el sistema presenta la respuesta de la Figura 45:

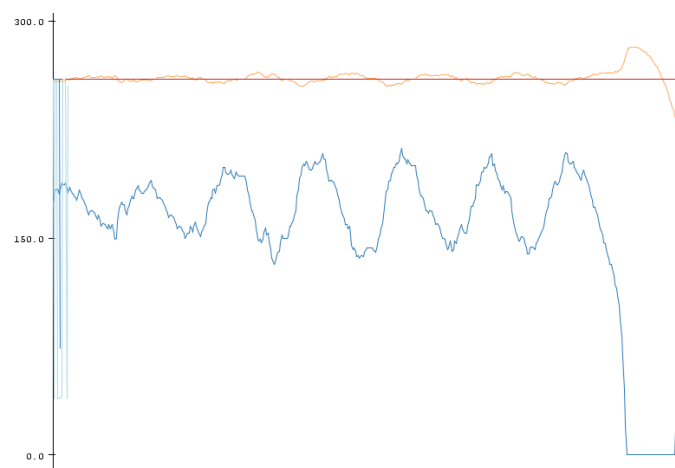


Fig. 45. Respuesta del sistema para $k_p = 5$ y $k_i = 3,5$

con lo que el valor límite inferior de k_i que permite estabilizar el sistema es un valor un poco superior a 3,5.

Gracias a la Figura 46 podemos darnos cuenta como la variando la respuesta del sistema y como van apareciendo oscilaciones cada vez mayores, desde la combinación de k_p y k_i óptima hasta una combinació de k_p y k_i límite. En este caso, si comparamos las Figuras 40, 45 y 46 vemos que ordenadas de mejor a peor respuesta del sistema tenemos la Figura 7.40, luego la Figura 7.46 y finalmente la Figura 45, siendo ésto absolutamente coherente, ya que k_i cada vez toma un valor más cercano al valor límite.

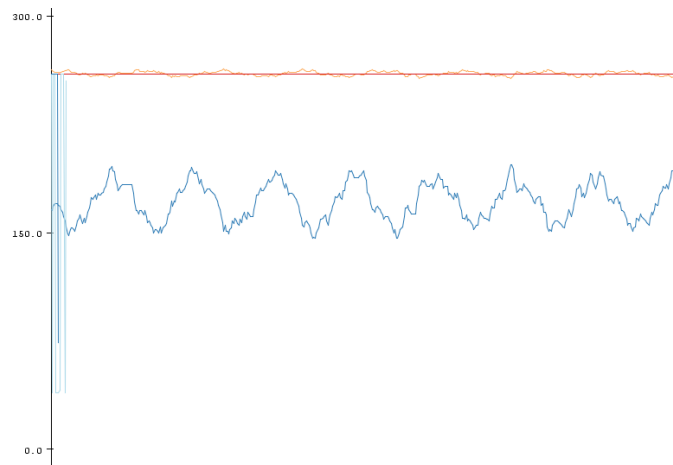


Fig. 46. Respuesta del sistema para $k_p = 5$ y $k_i = 4$

Como ya hemos hallado un controlador los más sencillo posible y que nos permite estabilizar el sistema con una buena respuesta y un buen comportamiento no resulta necesario empezar a probar controladores del tipo PD o PID.

6.3. Detalles del montaje



Fig. 47. Conexión del sensor al Arduino

Como se observa en la Figura 47, el sensor se ha conectado al Arduino al los pines de 0V y 5V y también al pin A5, por el que leemos la información del sensor.

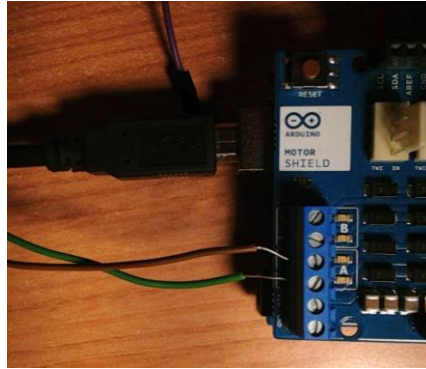


Fig. 48. Conexión del electroimán al Arduino

Por otro lado, en la Figura 48 también tenemos la conexión del electroimán al Arduino a través del canal A de la etapa de potencia. Esta a su vez se alimenta del ordenador al que esté conectado a través del puerto USB.

Finalmente, las 3 últimas figuras sólo buscan dejar constancia del funcionamiento del levitador.

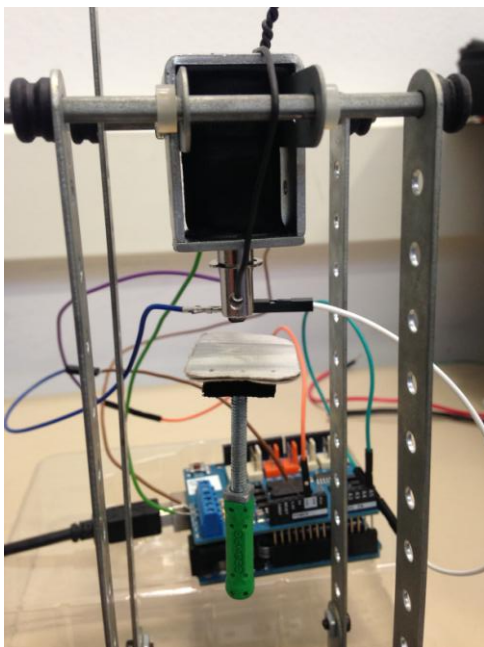


Fig. 49. Levitador funcionando_1

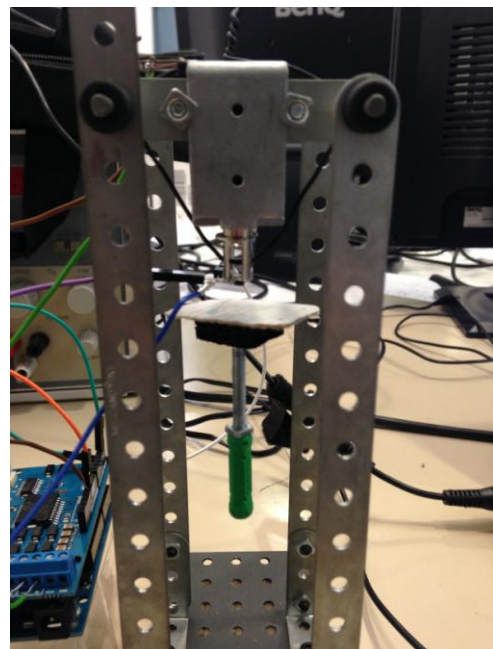


Fig. 50. Levitador funcionando_2

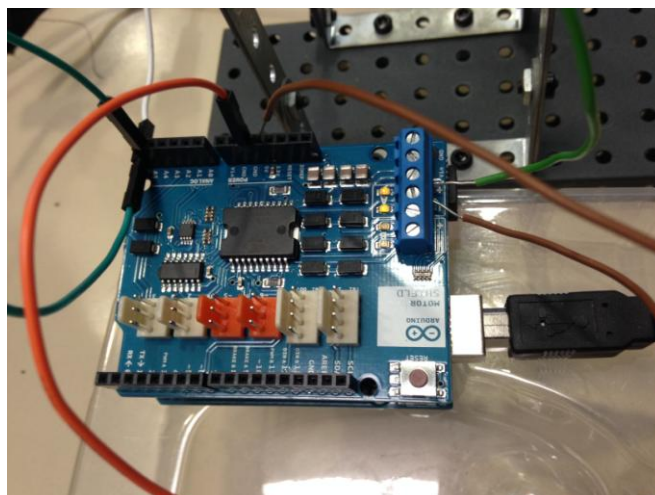


Fig. 51. Arduino en funcionamiento

7. Presupuesto

Para poder llevar a cabo este proyecto resulta imprescindible conocer cuál es el presupuesto necesario. El coste de los materiales es el siguiente [27]:

- Arduino Uno	→	55,06€
- Motor Shield Arduino	→	26,74€
- Sensor efecto Hall	→	1,97€
- Electroimán	→	17,30€
<u>TOTAL</u>		101,07€

Depende el caso, si ya se dispone del Arduino Uno y la etapa de potencia no habría que comprarla, disminuyendo mucho el coste.

Además del coste de los materiales también hay que tener presente toda la fase de diseño se ha llevado a cabo en un entorno de oficina, con el correspondiente consumo de material de oficina.

Por último, no hay que olvidar tampoco el consumo energético que requiere el levitador para funcionar, energía eléctrica que también tiene un coste.

8. Estudio de impacto ambiental

En cuanto al impacto ambiental directo de este proyecto puede considerarse que es prácticamente nulo, ya que se trata de un gadget pensado para un entorno académico o de laboratorio. Ninguno de los componentes que lo conforma es extremadamente contaminante ni peligroso para la salud, con lo que se puede concluir que no es un proyecto cuyo desarrollo conlleve un gran riesgo para el medio ambiente, por lo que no es un argumento de peso a la hora de valorar la viabilidad de la ejecución.

También es cierto que de forma indirecta todo acaba teniendo un impacto ambiental, ya sea el uso de materias primas obtenidas de la naturaleza, el uso de electricidad consumida de la red, etc. Todo afecta pero en este caso es de forma muy indirecta con lo que no debe suponer una preocupación si bien nunca está de más tenerlo en cuenta.

Conclusiones

Las conclusiones de este proyecto han sido muchas y muy diversas y abarcan desde ámbitos puramente técnicos hasta conclusiones más ligadas al diseño y desarrollo de proyectos.

A continuación se pretende recopilarlas con la intención de tener una visión más global de lo que ha sido y lo que supuesto el desarrollo de este proyecto.

En primer lugar y seguramente una de las más importantes es la gran diferencia que existe entre el diseño de un proyecto y su ejecución, entre un modelo y el sistema real. La realidad es mucho más compleja que cualquier modelo que pueda hacerse de ella, con lo que resulta de vital importancia saber que partes de un modelo son prescindibles y cuáles no, ya que eso te permite hallar un modelo que caracteriza de forma razonable tu sistema con la mayor simplicidad posible. Además, la mayoría de las veces, aunque conozcas la expresión que modela tu sistema, determinar los coeficientes característicos de un sistema concreto resulta, de por sí, una gran cantidad de trabajo.

Siguiendo en esta línea, es muy importante darse cuenta que no existe un único modelo unificado de un levitador magnético, sino que existen muchos modelos que aproximan el comportamiento de éste, dando más importancia a unos fenómenos físicos u otros. En nuestro caso, nos hemos encontrado con un levitador único en el sentido que no se ha podido hallar ningún modelo que tuviera en consideración todos los efectos que resultaban significativos en el nuestro. Por este motivo ha habido que construirse un modelo partiendo del modelo más básico y añadiendo aquellos fenómenos físicos significativos. Esto ha supuesto que el modelo presentado en este documento podría decirse que es un primer modelo, un modelo inicial que pese a acercarse a la realidad, no la refleja de forma exacta. Concretando un poco más, al hacer levitar un imán y al tener que el núcleo del solenoide relativamente cerca de éste, la inducción magnética del imán sobre la bobina ha resultado ser un fenómeno significativo y no se ha sabido encontrar ningún modelo que lo tuviera en consideración. Por tanto, ha sido necesario trabajarlo desde cero lo cual ha conllevado la complicación del modelo, una mayor complejidad de éste a la hora de trabajar con él y estudiar su comportamiento.

A pesar de esto, lo que resulta más sorprendente de todo es que esta complicación del modelo ha permitido una simplificación muy interesante en cuanto al control. En un levitador en que la inducción magnética no resulta significativa, no es posible llevar a cabo su control estable en lazo cerrado con un controlador P ni con un controlador PI, sino únicamente con un controlador PD o un controlador PID. Pero cuando la inducción

magnética resulta significativa, como en nuestro caso, el sistema pasa a ser controlable con un controlador P y también con un controlador PI, lo cual es muy interesante, teniendo en cuenta que un control con parte derivativa, si no está bien diseñado, puede generar muchos problemas.

Además, no ha ayudado que nuestro sistema sea inestable en lazo abierto y además no lineal, lo que nos ha obligado a estar constantemente linealizando todos aquellos fenómenos que de forma natural son no lineales.

A pesar de todo, la consideración global es que el modelo obtenido, a pesar de no ser muy preciso, te permite comprender los fenómenos que tienen lugar en el sistema, cuando resultan significativos y como afectan a tu sistema.

Por otro lado, en cuanto a la vertiente más aplicada del proyecto, se ha conseguido construir un levitador magnético que cumple todas las restricciones impuestas al comienzo del proyecto y que además ofrece muchas posibilidades en el ámbito de la docencia al haber logrado generar un levitador diferente en cuanto a comportamiento, prestaciones y posibilidades se refiere. Por supuesto, siempre hay puntos a mejorar y aspectos a perfeccionar pero la valoración es muy positiva.

Por último, este proyecto ha resultado de gran utilidad para ver con una nueva perspectiva la importancia de la gestión óptima del tiempo y los recursos, para poder cumplir los objetivos fijados de forma satisfactoria. Ha servido para desglosar las distintas partes y procesos de la ejecución de un proyecto, para darse cuenta de cuales resultan críticas, cuales suelen ser las que conllevan más problemas y como anticiparse a estas situaciones en proyectos futuros.

A modo de punto y final, dar cuatro pinceladas sobre cuáles podrían ser las líneas de acción futuras en este proyecto, con el objetivo de depurar, mejorar y perfeccionar tanto su apariencia, sus prestaciones y su comportamiento:

- En primer lugar, podría resultar muy interesante diseñar y desarrollar una estructura de soporte estéticamente más atractiva, ya que muchas veces un producto se vende también por su envoltorio.

- Otro punto al que podría dedicarse especial atención en una posible segunda fase del proyecto sería el perfeccionamiento del modelo para lograr un ajuste aún mejor al comportamiento del sistema real. Este tipo de procesos resultan muy poco agradecidos ya que requieren una gran dedicación de horas frente a una mejora poco significativa a nivel cuantitativo, pero que sí que conllevan una gran mejora a nivel cualitativo.

- Por último, podría desarrollarse más el software para que permitiera la levitación en

distintos puntos de equilibrio a la vez que con distintos objetos levitados. Esto es algo que resulta muy sencillo de decir pero que supone una gran cantidad de trabajo, ya que conlleva de forma implícita el desarrollo del modelo del sistema, punto ya comentado y exigente.

Bibliografía

Referencias bibliográficas

- [1] [<https://es.wikipedia.org/wiki/Ferromagnetismo>, 25 de marzo de 2016]
- [2] [<https://es.wikipedia.org/wiki/Paramagnetismo>, 25 de marzo de 2016]
- [3] [<https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/9923/Control%20lineal%20y%20no%20lineal%20de%20un%20levitador%20magnetico.pdf?sequence=1>, 10 de junio de 2016]
- [4] [<https://solarbotics.com/product/50450/>, 10 de junio de 2016]
- [5] [<https://store.arduino.cc/product/A000079>, 10 de junio de 2016]
- [6] [<http://www.bluetip.com.uy/GP2Y0A21YK>, 10 de junio de 2016]
- [7] [<https://magneticlevitation.wordpress.com/teorema-de-earnshaw/>, 25 de marzo de 2016]
- [8] [<http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/prost/proceedings/ifac2014/media/files/0147.pdf>, 15 de abril de 2016]
- [9] [<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/induccin/faraday/faraday.htm>, 15 de abril de 2016]
- [10] [https://es.wikipedia.org/wiki/Resistencia_el%C3%A9ctrica, 30 de marzo de 2016]
- [11] [http://www.ecured.cu/Efecto_pelicular, 30 de marzo de 2016]
- [12] LORRAIN, P y CORSON, D. R., Campos y ondas electromagnéticos. Madrid, p. 334-338 y 368-370.
- [13] [<http://forum.lawebdefisica.com/threads/24431-cables-como-solenoides>, 10 de junio de 2016]
- [14] [http://www.inacomm2013.ammindia.org/Papers/006-inacomm2013_submission_203.pdf, 15 de abril de 2016]
- [15] [http://www.ijareeie.com/upload/2013/december/38_Different.pdf, 15 de abril de 2016]

- [16] SLOTINE, J. J. E. y LI, W., Applied Nonlinear Control. New Jersey, p. 53-56.
- [17] [<http://www.bluetip.com.uy/GP2Y0A21YK>, 10 de junio de 2016]
- [18] CHENG, D. K., Field and Wave Electromagnetics. New York, p. 282-283.
- [19] [<http://es.farnell.com/allegro-microsystems/a1301eua-t/hall-effect-sensor-sip-3-1301/dp/1198085>, 12 de junio de 2016]
- [20] [<http://www.luisllamas.es/2015/06/detectar-campos-magneticos-con-arduino-y-sensor-hall-a3144/>, 12 de junio de 2016]
- [21] [<http://www.instructables.com/id/Arduino-Motor-Shield-Tutorial/?ALLSTEPS>, 3 de mayo de 2016]
- [22] [http://www.sharpsma.com/webfm_send/1208, 22 de abril de 2016]
- [23] [<https://minibots.wordpress.com/2013/11/30/utilizacion-del-sensor-de-distancia-sharp-2y0a21/>, 22 de abril de 2016]
- [24] Apuntes asignatura “Control Automático” de la Escola Tècnica Superior d’Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB), curso 2015 – 2016
- [25] [<http://www.luisllamas.es/2015/08/salidas-analogicas-pwm-en-arduino/>, 3 de mayo de 2016]
- [26] [https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/19734/3/Optimizacion_Problemas_sin_restricciones.pdf, 25 de abril de 2016]
- [27] [<http://www.ondaradio.es>, 10 de junio de 2016]
- [28]

Bibliografía complementaria

Aquest apartat si s'escau s'ha de presentar de la mateixa forma que la llista de referències anterior, però amb la diferència que en ell poden figurar referències bibliogràfiques consultades o relatives a la temàtica objecte del TFG/TFM, i que no hagin estat citats al llarg del mateix. Haurien d'indicar-se els criteris amb els que s'han seleccionat els documents.